

ÉLÉMENTS D'INFOGRAPHIE 2D

Licence d'Informatique - L3 [2025-2026]¹

JP. ZANOTTI²

TABLE DES MATIÈRES

Avertissement	1
1. Introduction	2
2. Rappels d'algèbre linéaire	2
2.1. Espaces vectoriels, famille libre, famille génératrice, base	2
2.2. L'espace n -dimensionnel canonique	3
2.3. Applications linéaires, calcul matriciel	5
2.4. Algorithme de Gauss-Jordan	7
2.5. Produit scalaire, rotations	9
2.6. Représentation dans le plan complexe	11
3. Espaces affines et espaces projectifs	13
3.1. Espaces affines	13
3.2. Espaces projectifs	15
3.3. Transformations dans le complété projectif du plan réel	16
4. Segments de droites et arcs de cercle	18
4.1. Segments, algorithme de Bresenham	18
4.2. Arcs de cercle, algorithme de Michener	20
5. Courbes de Bézier	21
5.1. Courbes de Bézier simples	21
5.2. Courbes de Bézier par morceaux	26
6. Courbes B -splines	28
6.1. Courbes B -splines simples	28
6.2. Courbes B -splines uniformes	31
7. Surfaces de Bézier	31

Annexe A - Le cercle trigonométrique	33
7.1. Pythagore	33
7.2. Tangente, cotangente, secante, cosecante	33
7.3. Périodicité	33
7.4. Symétries	33
7.5. Addition et différence	33
7.6. Angle double, carré et moitié	34
7.7. Transformation de produits en sommes	34
7.8. Transformation de sommes en produits	34
7.9. Dérivation	34
8. Annexe B - Triangles	34
8.1. Rappels du collège sur les polygones	34
8.2. Complément sur les polygones	35
8.3. Triangles, définition et vocabulaire	35
8.4. L'inégalité triangulaire	36
8.5. Somme des angles d'un triangle	36
8.6. Droites remarquables dans un triangle	37
8.7. Le théorème de Pythagore et sa réciproque	38
Index	40

AVERTISSEMENT

Les exercices de travaux dirigés, ou les exercices de travaux pratiques sont accompagnés d'un symbole qui qualifie leur difficulté :

- (1) Ceux marqués ♥ sont des applications directes des définitions et leur résolution peut souvent se faire « de tête », ou ne devrait demander que quelques minutes de réflexion. Ils ont pour objectif de s'assurer que la notion concernée est acquise.
- (2) Ceux marqués ♦ nécessitent un crayon et demandent un peu plus de réflexion, sans dépasser la demi-heure.
- (3) Ceux marqués ♠ sont plus difficiles ou constituent de petits problèmes.

1. Version du 17 juin 2025 [10:16]

2. UFR-Sciences & Techniques, IMATH

Les passages qui sont des compléments de cours ou qui ne sont pas fondamentaux sont écrits dans une police plus petite et peuvent être passés en première lecture. Les termes nouvellement définis sont distingués du reste du texte *de cette manière*, ils sont regroupés dans une table d'index en fin de document.

1. INTRODUCTION

L'infographie désigne l'ensemble des techniques et méthodes qui permettent de créer, manipuler et représenter des images dans un espace à 2 ou 3 dimensions, plus spécifiquement à l'aide des ordinateurs. Elle englobe la conception de formes géométriques, la gestion des couleurs, des textures, des ombrages, ainsi que l'animation d'éléments visuels. Elle est utilisée en design graphique, dans les jeux vidéo, les interfaces utilisateur ou encore l'illustration.

Elle mobilise un ensemble cohérent de connaissances scientifiques issues de plusieurs champs disciplinaires. Tout d'abord, la *géométrie euclidienne* et la *trigonométrie* sont essentielles pour modéliser les formes, manipuler les coordonnées, gérer les angles et les distances dans le plan ou l'espace. L'algèbre linéaire y joue un rôle central, notamment à travers la manipulation de vecteurs, matrices et espaces vectoriels, outils indispensables pour les transformations (translations, rotations, homothéties), le changement de repères ou encore le calcul de projections.

La physique, en particulier l'*optique géométrique*, intervient dans la modélisation de la lumière, des ombres, des réflexions et réfractions, éléments clés du rendu réaliste. Les notions de *cinématique* et de *dynamique* (mouvement, force, inertie) sont également mobilisées, notamment pour l'animation et la simulation physique. Une certaine culture en *perception visuelle* et *colorimétrie* permet de mieux comprendre les systèmes de couleur, l'anticrénelage, ou les techniques d'amélioration visuelle.

Quelques bases en *analyse numérique* sont utiles pour l'approximation de fonctions, l'interpolation et la discrétisation. En *algorithmique*, des connaissances en structures de données, complexité et programmation orientée objet sont requises pour implanter les moteurs graphiques, gérer les scènes et optimiser le rendu.

L'infographie constitue ainsi un domaine interdisciplinaire à l'interface entre modélisation mathématique, informatique et physique.

2. RAPPELS D'ALGÈBRE LINÉAIRE

Les fondements mathématiques de l'infographie reposent sur des objets géométriques élémentaires, indispensables à la modélisation et à la manipulation des scènes visuelles. Le *point* dans un *espace affine* et le *vecteur* dans un *espace vectoriel* constituent les éléments de base.

Les *droites* et *segments* sont utilisés pour structurer les formes, définir des contours ou tracer des trajectoires, et le plan peut également être muni d'une structure d'*espace projectif* pour le mettre en adéquation avec notre perception physique de la géométrie. Les *courbes*, qu'elles soient polynomiales ou paramétriques, offrent une représentation plus souple des formes complexes.

Les espaces vectoriels, affines et projectifs sont les structures algébriques adaptées pour coder et opérer sur des images symboliquement. Il est donc indispensable d'en comprendre le rôle et de maîtriser l'arsenal qui les accompagne. Tout ce qui suit n'est constitué que de rappels du cours d'algèbre linéaire étudié en deuxième année de licence. Les transformations géométriques fondamentales (translation, rotation, homothétie, symétrie, etc) dans ces différentes modélisations du plan sont principalement réalisées à l'aide du calcul matriciel.

2.1. ESPACES VECTORIELS, FAMILLE LIBRE, FAMILLE GÉNÉRATRICE, BASE

On rappelle qu'une loi de composition *interne* sur un ensemble E est une application de $E \times E \rightarrow E$ et qu'une loi de composition *externe* est une application de $D \times E \rightarrow E$ où D est le *domaine d'opérateurs*. Dans les deux cas, le résultat de la composition est un élément de E . Les structures de *magma*, de *groupe*, d'*anneau* et de *corps* sont à revoir [dans le cours de 1ère année](#).

Définition 1. On appelle *K-espace vectoriel* tout triplet $(E, +, \cdot)$ composé d'un ensemble E muni d'une loi de composition interne $+$ (*addition*) et d'une loi de composition externe \cdot (*produit externe*) à *domaine d'opérateurs* K , un *corps commutatif*, et qui satisfaisait les propositions suivantes :

- (1) $(E, +)$ est un groupe commutatif;
- (2) $\forall \lambda \in K \ \forall (u, v) \in E \times E \ \lambda.(u + v) = (\lambda.u) + (\lambda.v)$;
- (3) $\forall (\lambda, \mu) \in K \times K, \ \forall u \in E \ (\lambda + \mu).u = (\lambda.u) + (\mu.u)$;
- (4) $\forall (\lambda, \mu) \in K \times K, \ \forall u \in E \ \lambda.(\mu.x) = (\lambda\mu).x$;
- (5) $\forall u \in E \ 1.u = u$.

Un élément u d'un ensemble E muni d'une structure de K -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est appelé **vecteur**, un élément λ du corps K est appelé **scalaire**.

Une **combinaison linéaire** est une construction élémentaire et fondamentale dans les espaces vectoriels. Elle fait intervenir les deux lois de composition de l'espace vectoriel, l'addition de deux vecteurs et la multiplication d'un vecteur par un scalaire :

Définition 2. Une **combinaison linéaire** d'une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs d'un K -espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est un vecteur u défini par une somme

$$u := \sum_{i \in I} \alpha_i u_i \quad (1)$$

où $(\alpha_i)_{i \in I}$ désigne une famille d'éléments de K presque nulle³.

Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est dite **libre** si aucun de ses vecteurs ne peut s'écrire comme combinaison linéaire des autres, autrement dit si et seulement si

$$\sum_{i \in I} \alpha_i u_i = 0 \Rightarrow \forall i \in I \ \alpha_i = 0. \quad (2)$$

Les vecteurs de la famille sont alors dits **linéairement indépendants**. Dans le cas contraire, la famille est dite **liée** et les vecteurs **linéairement dépendants**.

Définition 3. Soit $(E, +, \cdot)$ un K -espace vectoriel et F une partie non-vide de E stable pour les lois induites. Alors $(F, +, \cdot)$ est un espace vectoriel, appelé **sous-espace vectoriel** de $(E, +, \cdot)$.

3. Seul un nombre fini de scalaires α_i ne sont pas nuls. Cette condition est indispensable sans quoi la somme n'aurait pas de sens, elle est toujours satisfaite en infographie car les familles I considérées sont toujours finies.

Exercice 1 ♥ Montrez que si $(F, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$, alors nécessairement $0_E \in F$ où 0_E est l'élément neutre pour la loi $+$ qui équipe E . Montrez que $(\{0\}, +, \cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(E, +, \cdot)$.

Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs d'un espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ est appelée **famille génératrice** d'un sous-espace vectoriel $(F, +, \cdot)$ si tout vecteur de F peut s'exprimer comme une combinaison linéaire d'éléments de cette famille. Le plus petit espace vectoriel qui contient les vecteurs de $(u_i)_{i \in I}$ est dit **engendré** par ces vecteurs, c'est l'intersection de tous les espaces vectoriels qui les contiennent.

Définition 4. Une famille de vecteurs à la fois libre et génératrice d'un sous-espace F en constitue une **base**. Si cette base est finie, son cardinal est appelé **dimension** de l'espace vectoriel F , que l'on note $\dim(F)$.

Considérons à présent une base $B = (e_1, \dots, e_n)$ d'un K -espace vectoriel E de dimension n et u un vecteur quelconque de E . Puisque B est une base, il existe un n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ de K^n tel que u est combinaison linéaire des vecteurs de B avec ces scalaires :

$$u = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n.$$

On appelle alors **coordonnées** de u dans la base B , le n -uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et on écrit

$$u : (\alpha_1, \dots, \alpha_n)_B.$$

Travaux Pratiques 1 ♥ En supposant que les vecteurs sont codés en *Python* par des tuples de longueur n contenant leurs coordonnées dans une base, écrivez une fonction *Python* `CL(alpha, u)` qui renvoie la combinaison linéaire des vecteurs contenus dans le tuple u avec les coefficients (flottants) contenus dans le tuple α .

2.2. L'ESPACE n -DIMENSIONNEL CANONIQUE

Avant de nous intéresser spécifiquement au plan réel de dimension 2, on peut construire un espace-vectoriel $(E, +, \times)$ de dimension arbitraire n à

partir d'un corps commutatif $(K, +, \times)$ quelconque qui en sera le corps des scalaires. On considère le produit cartésien $E := K^n$ muni de l'addition interne $+$ et de la multiplication externe \cdot définies par

$$(u_1, \dots, u_n) + (v_1, \dots, v_n) := (u_1 + v_1, \dots, u_n + v_n) \quad (3)$$

$$\lambda \times (u_1, \dots, u_n) := (\lambda \times u_1, \dots, \lambda \times u_n) \quad (4)$$

On démontre (exercice 2) que $(E, +, \times)$ est un espace vectoriel que l'on appelle *espace canonique de dimension n* .

Exercice 2 ♥ Montrez que l'ensemble $E := K^n$ muni des lois interne $+$ et externe \times définies ci-dessus est un K -espace vectoriel.

Alors la famille de vecteurs $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ définis par

$$e_i := (0, \dots, 0, \underset{i-1}{1}, \underset{i}{0}, \dots, \underset{n}{0}) \quad (5)$$

où 1 désigne l'élément neutre⁴ pour la multiplication \times dans le corps K , est manifestement *libre* :

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) = 0 \Leftrightarrow \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \alpha_i = 0. \quad (6)$$

La famille $(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ est également *génératrice*, puisque tout vecteur $u = (u_1, \dots, u_n)$ de K^n peut s'écrire $\sum_{i=1}^n u_i e_i$. C'est donc une *base* de K^n appelée *base canonique*. Les coordonnées de u dans la base canonique sont alors

$$u : (u_1, \dots, u_n).$$

Quand $n = 2$ et $K = \mathbb{R}$, l'espace ainsi construit s'appelle le *plan réel* ou *plan vectoriel réel*, nous le noterons \mathcal{P} . La base canonique de \mathcal{P} est donc constituée des deux vecteurs $(1, 0)$ et $(0, 1)$. Un couple (x, y) de \mathbb{R}^2 définit à la fois un vecteur du plan et ses coordonnées dans la base canonique.

4. Dans la proposition (6), la valeur 0 à gauche de l'équivalence désigne le vecteur nul $(0, \dots, 0)$, élément neutre pour l'addition interne \oplus définie sur K^n , alors qu'à droite il désigne l'élément neutre pour l'addition dans le corps $(K, +, \times)$.

Exercice 3 ♥ Vérifiez que les vecteurs $(-1, 0)$ et $(0, 1)$ constituent une base de \mathcal{P} . Quelles sont les coordonnées du vecteur $u = (x, y)$ dans cette base?

Remarque. L'espace à trois dimensions \mathbb{R}^3 est construit exactement de la même manière et la plupart des notions abordées dans la suite se généralisent à cet espace.

Exemple alternatif. Il est bien connu que toutes les couleurs peuvent s'obtenir en combinant les couleurs primaires *rouge*, *vert* et *bleu*⁵. Cette combinaison consiste à additionner ces trois sources lumineuses, chacune avec son intensité. Ce sont les variations de ces trois intensités qui permettent de décrire tout le spectre des couleurs visibles. Ainsi, en codant les intensités dans l'intervalle $[0, 1]$, une couleur C est codée

$$\alpha_R R + \alpha_V V + \alpha_B B.$$

L'intervalle $[0, 1]$ muni de l'addition et de la multiplication induites par celle de \mathbb{R} ne constitue pas un corps, l'espace des couleurs tel qu'il est simplifié ici n'est donc pas un espace vectoriel⁶ à proprement parler. En revanche la possibilité d'obtenir toutes les couleurs uniquement avec les trois couleurs primaires, illustre parfaitement la notion de base d'un espace vectoriel. Une couleur C a pour coordonnées un triplet $(\alpha_R, \alpha_V, \alpha_B)$ dans la pseudo base $\{R, V, B\}$. Le codage dit RVB sur trois octets n'est qu'une discrétisation de l'intervalle $[0, 1]$ en 256 valeurs.

Sur un écran, la couleur *jaune* la plus intense est obtenue grâce à la combinaison

$$J = \frac{255}{255} R + \frac{255}{255} V + \frac{0}{255} B.$$

5. En synthèse *additive*, on combine des sources lumineuses de longueurs d'ondes données. Les couleurs obtenues par le mélange de peintures est *soustractive*. Ainsi le mélange du rouge et du vert donne du jaune en additif et du marron en soustractif.

6. Le modèle physique initié par Newton et qui déborde largement du cadre de ce cours, l'est en revanche. Dans ce modèle, les trois couleurs primaires constituent effectivement une base de l'espace des couleurs, cf. *The geometry of colors* de J.W. Weinberg.

2.3. APPLICATIONS LINÉAIRES, CALCUL MATRICIEL

Quand on dispose d'ensembles E et F munis d'une même structure algébrique, il est naturel de s'intéresser aux applications $f : E \rightarrow F$ qui ne bouleversent pas cette structure : les *morphismes*.

Un morphisme entre espaces vectoriels est appelé *application linéaire*. Soit donc E et F deux K -espaces vectoriels et $f : E \rightarrow F$ une application. Pour que f soit une application linéaire, elle doit respecter les deux structures additive et multiplicative :

$$\begin{aligned} \forall (u, v) \in E^2 \quad f(u + v) &= f(u) + f(v) \\ \forall (\lambda, u) \in K \times E \quad f(\lambda \cdot u) &= \lambda \cdot f(u) \end{aligned}$$

Définition 5. Soit f une application linéaire $f : E \rightarrow F$. On appelle *noyau* de f l'ensemble

$$\ker(f) := \{x \in E \mid f(x) = 0\}. \quad (7)$$

On appelle *image* de f l'image directe $f(E)$, i.e.

$$\operatorname{im}(f) := \{f(x) \mid x \in E\}. \quad (8)$$

Exercice 4  Soit f une application linéaire $f : E \rightarrow F$. Montrez que $\operatorname{im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de F et que $\ker(f)$ est un sous-espace vectoriel de E . Montrez qu'une application linéaire est injective si et seulement si son noyau est réduit à l'espace $\{0_E\}$.

On appelle *rang* d'une application linéaire $f : E \rightarrow F$ la dimension de son image, i.e. $\operatorname{rang}(f) := \dim(\operatorname{im}(f))$. La dimension du noyau est donnée par la relation suivante :

$$\dim(\ker(f)) = \dim(E) - \dim(\operatorname{im}(f)). \quad (9)$$

Définition 6. Soit n et m deux entiers naturels non-nuls et $I := \llbracket 1, n \rrbracket$ et $J := \llbracket 1, m \rrbracket$. Soit $\varphi : E \rightarrow F$ une application linéaire entre deux K -espaces vectoriels de dimensions n et m et de bases $e = (e_i)_{i \in I}$ et $f = (f_j)_{j \in J}$ respectivement. On appelle *matrice représentative* de φ dans les bases e et f la famille⁷ $M_\varphi := (M_{\ell,c})_{(\ell,c) \in J \times I}$ dont les termes $M_{\ell,c}$ satisfont la

proposition

$$\forall c \in I \quad \varphi(e_c) = \sum_{\ell=1}^m M_{\ell,c} f_\ell.$$

Pour tout $\ell \in J$, la famille $M_{\ell,\cdot} := (M_{\ell,c})_{c \in I}$ est appelée ℓ -ème *vecteur ligne* de la matrice M_φ . Pour tout $c \in J$, la famille $M_{\cdot,c} := (M_{\ell,c})_{\ell \in J}$ est appelée c -ème *vecteur colonne* de la matrice M_φ .

De manière plus imagée, la ℓ -ème colonne de la matrice code les coordonnées du vecteur image $\varphi(e_\ell)$ dans la base f :

$$M_\varphi := \begin{matrix} & \varphi(e_1) & \varphi(e_2) & \dots & \varphi(e_n) \\ \begin{matrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{matrix} & \begin{pmatrix} M_{1,1} & M_{1,2} & \dots & M_{1,n} \\ M_{2,1} & M_{2,2} & \dots & M_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ M_{m,1} & M_{m,2} & \dots & M_{m,n} \end{pmatrix} \end{matrix} \quad (10)$$

Le principal intérêt d'une telle représentation est algorithmique, il s'agit de réaliser *effectivement* et *efficacement* des manipulations sur des images, donc sur ses constituants géométriques dans le cadre des espaces vectoriels.

Transposition. La *matrice transposée* d'une matrice M de dimension $n \times p$ a pour dimension $p \times n$ et pour lignes les colonnes de M . On la note M^\top :

$$\forall (j, i) \in J \times I \quad M_{j,i}^\top := M_{i,j}. \quad (11)$$

Somme. La *matrice somme* $S := A + B$ des matrices A et B de même dimension $n \times p$, est la matrice de dimension $n \times p$ obtenue en additionnant les valeurs terme à terme :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, p \rrbracket \quad S_{i,j} := A_{i,j} + B_{i,j}. \quad (12)$$

Produit. La *matrice produit* $P := A \times B$ des matrices A et B de dimensions respectives $n \times p$ et $p \times m$, est la matrice de dimension $n \times m$ obtenue par :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket \quad P_{i,j} := \sum_{k=1}^p A_{i,k} \times B_{k,j}. \quad (13)$$

Produit par un scalaire. Enfin, la matrice $\Lambda := \lambda A$ produit d'un scalaire $\lambda \in K$ et d'une matrice A de dimension $n \times p$ est obtenue en multipliant chaque terme de la matrice A par λ :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, m \rrbracket \quad \Lambda_{i,j} = \lambda A_{i,j}. \quad (14)$$

7. Attention aux indexations !

Les coordonnées du vecteur image $\varphi(u)$ dans la base f se calculent aisément grâce à la représentation matricielle (10) de φ :

$$M_\varphi \times u^\top \quad (15)$$

fournissant le *vecteur colonne* associé à $\varphi(u)$. On peut également obtenir le vecteur ligne associé à $\varphi(u)$ à partir du *vecteur ligne* associé à u :

$$u \times M_\varphi^\top \quad (16)$$

Remarque. Le choix classique du calcul avec des vecteurs colonne (15) plutôt qu'avec des vecteurs ligne (16) — les deux sont totalement équivalents — est justifié par l'écriture préfixe des applications $f(\cdot)$: quand on réalise deux opérations linéaires successives f puis g , on écrit $g \circ f$ dont la matrice représentative $M_{g \circ f}$ est égale à $M_g \times M_f$ comme le montre l'exercice ci-dessous. L'autre choix aboutirait au calcul $M_f \times M_g$ qui semblerait moins accordé avec la composition des applications.

Travaux Pratiques 2 ♦ Écrivez les fonctions *Python* suivantes sur des matrices de dimension arbitraire :

- (1) `Ligne(M,i)` : renvoie le i -ème vecteur ligne de la matrice M .
- (2) `Colonne(M,j)` : renvoie le j -ème vecteur colonne de la matrice M .
- (3) `Transposition(M)` : renvoie la matrice transposée M^\top de la matrice M .
- (4) `Somme(A,B)` : renvoie la matrice somme des matrices A et B .
- (5) `Produit(A,B)` : renvoie la matrice produit des matrices A et B .
- (6) `ProduitExterne(lambda,A)` : renvoie la matrice λA où $\lambda \in K$.
- (7) `Det(M)` : qui renvoie la valeur du déterminant de la matrice M .

Indications : Une matrice M est codée par un tuple de tuple M de manière à ce que $M[i][j]$ code la valeur $M_{i,j}$. Dans le calcul du produit de deux matrices, la valeur $P_{i,j}$ n'est rien d'autre que le *produit scalaire* du i -ème vecteur ligne de A par le j -ème vecteur colonne de B : $P_{i,j} = \langle A_{i,\cdot} | B_{\cdot,j} \rangle$.

Exercice 5 ♦ Lien entre calcul matriciel et opérations usuelles sur les applications linéaires.

- (1) Montrez que la somme $f + g$ de deux applications linéaires $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow F$ est une application linéaire et a pour représentation matricielle la matrice somme $M_{f+g} = M_f + M_g$.

- (2) Montrez que le produit $\lambda.f$ d'une application linéaire f par un scalaire λ est une application linéaire de représentation matriciel $\lambda.M_f$.
- (3) Montrez que la composition $g \circ f : E \rightarrow H$ de deux applications linéaires $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow H$ est une application linéaire et que sa représentation matricielle $M_{g \circ f}$ est la matrice produit $M_g \times M_f$.

On rappelle que pour qu'une application linéaire $f : E \rightarrow F$ entre K -espaces vectoriels de dimensions finies soit inversible, il est nécessaire qu'ils aient la même dimension. Dans ce cas, si la valeur du déterminant de la représentation matricielle de f n'est pas nulle, f est inversible et on peut calculer la représentation matricielle de f^{-1} à l'aide de l'algorithme de *Gauss-Jordan*.

Dans le cas général en dimension n , le calcul du déterminant se fait de manière inductive : si A est une matrice carrée $n \times n$, on peut « développer » ce déterminant suivant les colonnes ou les lignes de la matrices, soit respectivement :

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad |A| := \sum_{i=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+j} |A_{i,\bar{j}}|.$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket \quad |A| := \sum_{j=1}^n a_{i,j} (-1)^{i+j} |A_{i,\bar{j}}|.$$

où $A_{i,\bar{j}}$ désigne la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en privant la matrice A de sa i -ème ligne et de sa j -ème colonne. Dans le cas particulier du plan où $n = 2$,

$$A := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad |A| = ad - bc.$$

Travaux Pratiques 3 ♥ Écrivez une fonction *Python* `Det(M)` qui calcule le déterminant de la matrice M à l'aide de l'algorithme ci-dessus. Une matrice M est codée par un tuple de tuple M de manière à ce que $M[i][j]$ code la valeur $M_{i,j}$.

2.4. ALGORITHME DE GAUSS-JORDAN

Le calcul du déterminant L'*algorithme de Gauss-Jordan* construit itérativement la matrice inverse d'une matrice M de dimension $n \times n$, si celle-ci est inversible. Si M n'est pas inversible, l'algorithme fournit son rang, c'est-à-dire le *rang* de l'application linéaire qu'elle représente, donc la dimension du sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs colonnes de M . L'algorithme opère en deux grandes étapes et uniquement à l'aide de combinaisons linéaires des vecteurs lignes de la matrice :

- (1) *Triangularisation* : on transforme la matrice M en matrice triangulaire supérieure⁸ T .
- (2) *Diagonalisation* : on transforme la matrice triangulaire T en la matrice diagonale identité I .

Pour ce faire, chaque combinaison linéaire réalisée sur M est dupliquée sur une deuxième matrice, initialisée à la matrice identité I . Pour ne pas avoir à traiter deux matrices séparément, on travaille sur la matrice concaténée $M|I$ de dimension $n \times 2n$. À la fin du calcul, si la matrice M est inversible, la matrice $M|I$ aura été transformée en la matrice $I|M^{-1}$. Dans la suite, les combinaisons linéaires à réaliser n'étant déterminées que par les valeurs de la matrice M , on ne mentionne jamais la matrice I mais les combinaisons linéaires opèrent effectivement sur les vecteurs lignes de la matrice concaténée $M|I$.

(1) *Triangularisation* : La transformation de M en matrice triangulaire supérieure T est réalisée en n étapes, vecteur colonne après vecteur colonne de gauche à droite. L'hypothèse de récurrence forte est qu'à l'étape j , au moment de traiter le j -ème vecteur colonne $M_{\cdot,j}$, les $j-1$ qui précèdent contiennent des valeurs nulles sous la diagonale. On normalise tout d'abord le vecteur ligne $M_{j,\cdot}$, i.e. on le multiplie par le scalaire $M_{j,j}^{-1}$, puis chaque vecteur ligne $M_{\ell,\cdot}$ pour $\ell \in \llbracket j+1, n \rrbracket$ est remplacé par la combinaison linéaire

$$M_{\ell,\cdot} - M_{j,\ell} \cdot M_{\ell,\cdot}$$

Ceci suppose que le *pivot* $M_{j,j} \neq 0$. Dans le cas contraire, on échange la ligne j avec une ligne $\ell > j$ telle que $M_{\ell,j} \neq 0$ s'il en existe, sinon la matrice M n'est pas inversible. À ce stade, la matrice M ne contient que des 1

8. les valeurs sous la diagonale $i = j$ sont toutes nulles.

sur la diagonale et des valeurs nulles en dessous, la dernière ligne est donc égale au vecteur $e_n = (0, \dots, 0, 1)$ de la *base canonique*.

(2) *Diagonalisation* : La transformation de T en la matrice identité I en n étapes reprend le même principe, mais vecteur ligne après vecteur ligne de bas en haut en partant de l'avant dernier (le dernier a la bonne forme après la 1ère étape). L'hypothèse de récurrence forte est qu'à l'étape i , au moment de traiter le i -ème vecteur ligne $M_{i,\cdot}$, chaque vecteur ligne $M_{\ell,\cdot}$ qui suit pour $\ell > i$ est égal au ℓ -ème vecteur e_ℓ de la *base canonique*. Si le vecteur ligne $M_{i,\cdot}$ est identiquement nul, la matrice M n'est pas inversible, sinon il suffit de remplacer $M_{i,\cdot}$ par la combinaison linéaire

$$M_{i,\cdot} - \sum_{k=i+1}^n M_{i,k} \cdot M_{k,\cdot}$$

Quand la matrice n'est pas inversible, le nombre de colonnes traitées correspond au rang de la matrice M .

Exemple. On considère la matrice M suivante de dimension 3×3 et sa concaténation avec I :

$$M := \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & -1.0 \\ -3.0 & -1.0 & 2.0 \\ 2.0 & 1.0 & 3.0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M|I = \begin{pmatrix} 2.0 & 1.0 & -1.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -3.0 & -1.0 & 2.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 2.0 & 1.0 & 3.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

(1) *Triangularisation*.

Traitement de la 1ère colonne. On commence par la normalisation du 1er vecteur ligne en le multipliant par **0.5** :

$$\times 0.5 \left(\begin{array}{cccccc} \boxed{2.0} & 1.0 & -1.0 & 1.0 & 0.0 & 0.0 \\ -3.0 & -1.0 & 2.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 2.0 & 1.0 & 3.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} \mathbf{1.0} & 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ -3.0 & -1.0 & 2.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ 2.0 & 1.0 & 3.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

On annule successivement les valeurs -3 et 2 en ajoutant respectivement **3** fois la ligne 1 à la ligne 2, puis -2 fois la ligne 1 à la ligne 3 :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1.0} & 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ \boxed{-3.0} & -1.0 & 2.0 & 0.0 & 1.0 & 0.0 \\ \boxed{2.0} & 1.0 & 3.0 & 0.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 & 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ \mathbf{0.0} & 0.5 & 0.5 & 1.5 & 1.0 & 0.0 \\ \mathbf{0.0} & 0.0 & 4.0 & -1.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

Normalisation du 2-ème vecteur colonne en le multipliant par 2 :

$$\times 2 \begin{pmatrix} 1.0 & 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & \boxed{0.5} & 0.5 & 1.5 & 1.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 4.0 & -1.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 & 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & \mathbf{1.0} & 1.0 & 3.0 & 2.0 & 0.0 \\ 0.0 & \boxed{0.0} & 4.0 & -1.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix}$$

La dernière valeur dans la 2-ème colonne étant déjà nulle, on peut passer au traitement du 3-ème et dernier vecteur colonne en commençant par sa normalisation :

$$\times 0.25 \begin{pmatrix} 1.0 & 0.5 & -0.5 & 0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 & 1.0 & 3.0 & 2.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & \boxed{4.0} & -1.0 & 0.0 & 1.0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 & 0.5 & -0.5 & 0.50 & 0.0 & 0.00 \\ 0.0 & 1.0 & 1.0 & 3.00 & 2.0 & 0.00 \\ 0.0 & 0.0 & \mathbf{1.0} & -0.25 & 0.0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

(2) Diagonalisation.

Traitement du 2-ème vecteur ligne. On lui ajoute -1 fois la dernière ligne :

$$\begin{pmatrix} 1.0 & 0.5 & -0.5 & 0.50 & 0.0 & 0.00 \\ 0.0 & 1.0 & \boxed{1.0} & 3.00 & 2.0 & 0.00 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -0.25 & 0.0 & 0.25 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 & 0.5 & -0.5 & 0.50 & 0.0 & 0.00 \\ 0.0 & 1.0 & \mathbf{0.0} & 3.25 & 2.0 & -0.25 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -0.25 & 0.0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Traitement du 1er vecteur ligne. On lui ajoute -0.5 fois la 2-ème ligne et 0.5 fois la 3-ème ligne :

$$\begin{pmatrix} 1.0 & \boxed{0.5} & \boxed{-0.5} & 0.50 & 0.0 & 0.00 \\ 0.0 & 1.0 & \mathbf{0.0} & 3.25 & 2.0 & -0.25 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -0.25 & 0.0 & 0.25 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1.0 & \mathbf{0.0} & \mathbf{0.0} & -1.25 & -1.0 & 0.25 \\ 0.0 & 1.0 & 0.0 & 3.25 & 2.0 & -0.25 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 & -0.25 & 0.0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

et finalement

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} -1.25 & -1.0 & 0.25 \\ 3.25 & 2.0 & -0.25 \\ -0.25 & 0.0 & 0.25 \end{pmatrix}$$

Travaux Pratiques 4 ♠ Écrivez une fonction `Python GaussJordan(M)` qui renvoie la matrice inverse de la matrice `M` ou un message d'erreur si elle ne l'est pas. Vérifiez votre script en calculant les produits `Produit(M,MI)` et `Produit(MI,M)` où `MI = GaussJordan(M)`.

La composition de deux applications linéaires inversibles $g \circ f$

L'ensemble des applications linéaires inversibles d'un espace vectoriel E dans lui-même définit un groupe pour la composition des applications appelé *groupe linéaire* et noté $GL(E)$. L'élément neutre est l'application identité $x \mapsto x$ du plan dans lui-même (elle est bien linéaire) et la composition des applications est associative. Ce groupe n'est *pas* commutatif. Parallèlement, les matrices associées forment également un groupe pour la multiplication matricielle, ce groupe est isomorphe à $GL(E)$ auquel il est identifié. Dans le cas particulier où $E = \mathbb{R}^n$, ce groupe se note $GL_n(\mathbb{R})$.

La seule structure d'espace vectoriel nous permet d'étudier deux premières transformations élémentaires : les *translations* et les *homothéties* liées respectivement à la loi additive interne et la loi multiplicative externe.

Définition 7. Soit E un K -espace vectoriel et v un vecteur de E . On appelle *translation de vecteur v* , l'application $t_v : E \rightarrow E$ définie par

$$t_v(u) = u + v.$$

Définition 8. Soit E un K -espace vectoriel et λ un scalaire de K . On appelle *homothétie de rapport λ* , l'application $h_\lambda : E \rightarrow E$ définie par

$$h_\lambda(u) = \lambda u.$$

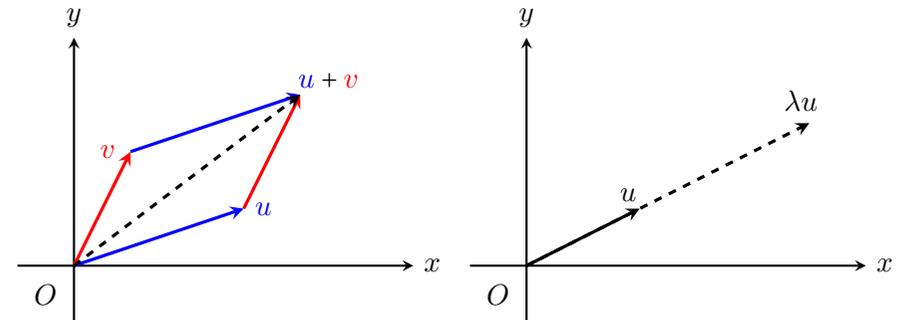


FIGURE 1. À gauche : translation de vecteur v . À droite : homothétie de rapport λ .

S'il n'est plus nécessaire de rappeler la nature des vecteurs en les surmontant d'une flèche comme au lycée, leur représentation dans le plan à l'aide de flèches est particulièrement commode pour appréhender les opérations de translation et d'homothétie liées aux deux opérations d'addition interne et de multiplication externe. Dans la base canonique $(1, 0)$, $(0, 1)$, le vecteur $u : (x, y)$ qui n'est finalement que le point de coordonnées (x, y) est représenté par une flèche qui part de l'origine $(0, 0)$ et se termine en (x, y) .

Exercice 6 ♥ Montrez qu'une *homothétie* de rapport λ est une application linéaire, mais qu'*a contrario* une translation de vecteur v n'est pas une application linéaire.

2.5. PRODUIT SCALAIRE, ROTATIONS

La structure d'espace vectoriel est le support de base pour faire de la géométrie, mais d'autres concepts s'avèrent indispensables pour étudier et manipuler des objets dans le plan : norme, distance, angle, toutes dérivées du produit scalaire :

Définition 9. Soit $u = (u_1, \dots, u_n)$ et $v = (v_1, \dots, v_n)$ deux vecteurs de \mathbb{R}^n . L'image $\langle u | v \rangle$ par l'application de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ dans \mathbb{R} définie par

$$\langle u | v \rangle := \sum_{i=1}^n u_i v_i \quad (17)$$

est appelée **produit scalaire** des vecteurs u et v .

Quand l'espace vectoriel est le plan \mathcal{P} , le produit scalaire est donc défini sur $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ par $\langle u | v \rangle := u_1 v_1 + u_2 v_2$.

Exercice 7 ♥ Soit E un K -espace vectoriel. Une *forme r -linéaire* est une application $E^r \rightarrow \mathbb{K}$ telle que chacune de ses r projections est linéaire. Montrez que le produit scalaire est une *forme bilinéaire symétrique non-dégénérée*, c'est-à-dire une application $\phi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ où $E := \mathbb{R}^n$ telle que :

- (1) $\forall (u, v, w) \in E^3$ $\phi(u + v, w) = \phi(u, w) + \phi(v, w)$ et $\phi(u, v + w) = \phi(u, v) + \phi(u, w)$ (bilinéarité).
- (2) $\forall (u, v) \in E^2$ $\phi(u, v) = \phi(v, u)$ (symétrie).

- (3) $\forall u \in E$ $(\forall v \in E \phi(u, v) = 0) \Rightarrow u = 0$ (non-dégénérescence).

Remarque. On peut définir des formes bilinéaires symétriques sur des espaces vectoriels $(K^n, +, \cdot)$ de corps commutatif K des scalaires quelconque. Toutefois, la notion de produit scalaire au sens géométrique (avec norme, distance et angle) nécessite que K soit un corps *ordonné* comme \mathbb{R} . On se limite donc naturellement au cas réel.

Un produit scalaire permet de définir la *norme* d'un vecteur u puis la *distance* entre deux vecteurs u et v :

$$\|u\| := \sqrt{\langle u | u \rangle} \quad \text{et} \quad d(u, v) := \|v - u\|. \quad (18)$$

Cette norme et cette distance dites *induites* sont appelées *norme euclidienne* et *distance euclidienne*. On démontre le théorème

Théorème 1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz). *Pour tous vecteurs u et v de l'espace \mathbb{R}^n ,*

$$|\langle u | v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \quad (19)$$

Exercice 8 ♥ Montrez que l'application de $\mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par (18) est bien une norme, i.e. qu'elle satisfait les axiomes suivants :

- (1) $\forall u \in \mathcal{P}$, $\|u\| \geq 0$ et $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$;
- (2) $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $\forall (u, v) \in \mathcal{P}^2$ $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$;
- (3) $\forall (u, v) \in \mathcal{P}^2$ $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire).

Pour l'inégalité triangulaire, utilisez l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Montrez que l'application de $\mathcal{P}^2 \times \mathcal{P}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par (18) est bien une distance, i.e. qu'elle satisfait les axiomes suivants :

- (1) $\forall (u, v) \in \mathcal{P}^2$, $d(u, v) \geq 0$ et $d(u, v) = 0 \Leftrightarrow u = v$;
- (2) $\forall (u, v) \in \mathcal{P}^2$, $d(u, v) = d(v, u)$;
- (3) $\forall (u, v, w) \in \mathcal{P}^3$, $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

Définition 10. Un vecteur u est dit **normé** ou **unitaire** si $\|u\| = 1$. Deux vecteurs u et v sont dits **orthogonaux** si $\langle u | v \rangle = 0$ et **orthonormés** si de plus ils sont normés.

Pour toute partie A du plan \mathcal{P} , on définit l'orthogonal de la partie A comme l'ensemble des vecteurs orthogonaux à A , soit

$$A^\perp := \{u \in \mathcal{P} \mid \forall v \in A \langle u | v \rangle = 0\}.$$

Notons que A^\perp est un sous-espace vectoriel de \mathcal{P} même si A ne l'était pas, en effet si $(u, v) \in A^\perp \times A^\perp$, $\lambda \in \mathbb{R}$ et w est un vecteur quelconque de A , alors $\langle u + v | w \rangle = \langle u | w \rangle + \langle v | w \rangle = 0$ et $\langle \lambda u | w \rangle = \lambda \langle u | w \rangle = 0$, donc A^\perp est stable pour les lois de \mathcal{P} .

Exercice 9 ♥ Soit A une partie quelconque d'un K -espace vectoriel E . Montrez que $(A^\perp)^\perp$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient A .

Un **hyperplan** est le noyau d'une forme linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de codimension 1, ou encore de dimension $n-1$ si n est la dimension de l'espace ambiant. Par exemple, si u désigne un vecteur non-nul d'un K -espace vectoriel $E = K \times \dots \times K$, l'ensemble u^\perp est un hyperplan puisque l'application $E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $v \mapsto \langle u | v \rangle$ est linéaire par bilinéarité du produit scalaire. Dans le cas du plan réel, l'hyperplan u^\perp est appelé **droite vectorielle**. Si $u = (a, b)$, alors les vecteurs $v = (x, y)$ orthogonaux à u satisfont

$$ax + by = 0. \quad (20)$$

Il s'agit là de **l'équation** d'une droite vectorielle D . Si $u = (x, y)$ est un vecteur non-nul et appartient à la droite D , i.e. s'il satisfait (20), alors tout vecteur λu qui lui est colinéaire ($\lambda \neq 0$) satisfait l'équation (20) également. N'importe lequel de ces vecteurs est appelé **vecteur directeur** de la droite D . On dit également que la droite D est **engendrée** par « son » vecteur directeur. En effet, si $u \neq 0$, $\{u\}$ forme une famille génératrice de D puisque D est l'ensemble des combinaisons linéaires de cette famille réduite à un élément. Ainsi, en notant $M(\lambda) := (x(\lambda), y(\lambda))$ le point du plan défini par

$$\begin{cases} x(\lambda) := \lambda x, \\ y(\lambda) := \lambda y. \end{cases}$$

on définit ce que l'on appelle une **représentation paramétrique** de la droite D de paramètre (λ) .

Une matrice A est dite **orthogonale** si les vecteurs formés par les deux colonnes de la matrice sont orthonormés. Ceci équivaut à ce que l'application linéaire représentée par cette matrice conserve le produit scalaire, i.e.

$$\forall (u, v) \in \mathcal{P} \quad \langle Au | Av \rangle = \langle u | v \rangle. \quad (21)$$

Exercice 10 ♥ Démontrez qu'une matrice A est orthogonale si et seulement si l'application linéaire représentée par cette matrice conserve le produit scalaire (équation (21)).

Ces matrices sont inversibles et l'inverse d'une matrice orthogonale A est sa matrice transposée A^\top qui est elle-même orthogonale. D'autre part, le produit de deux matrices orthogonales est une matrice orthogonale, les matrices orthogonales forment donc un sous-groupe (*non-commutatif*) du groupe $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ des matrices inversibles appelé **groupe orthogonal** et noté $\mathbf{O}_2(\mathbb{R})$. On peut caractériser ces matrices :

Proposition 1. Les matrices orthogonales sont de la forme

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \quad \text{avec } a^2 + b^2 = 1.$$

Exercice 11 ♦ Démontrez la proposition ci-dessus. Indication : montrez que A^\top est l'inverse de A donc à gauche et à droite. Montrez que le déterminant d'une matrice orthogonale est ± 1 . Trouvez un contre-exemple à la réciproque.

Les matrices orthogonales de déterminant 1 forment un sous-groupe *commutatif* de $\mathbf{O}_2(\mathbb{R})$ appelé **groupe spécial orthogonal** et noté $\mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$. Les matrices de ce groupe sont appelées des matrices orthogonales directes ou **matrices de rotation** et sont de la première forme dans la proposition ci-dessus.

2.6. REPRÉSENTATION DANS LE PLAN COMPLEXE

Le *corps des complexes* des nombres complexes \mathbb{C} , initialement construit pour imaginer une solution à l'équation $x^2 = -1$ dans \mathbb{R} s'est avéré particulièrement adapté pour étudier la géométrie du plan réel \mathcal{P} . Il existe plusieurs constructions de \mathbb{C} , nous présentons celle qui est la plus proche de nos préoccupations.

Pour construire un corps, il faut munir un ensemble E de deux lois de compositions internes, une *addition* $+$ et une *multiplication* \times , telles que $(E, +)$ et $(E \setminus \{0\}, \times)$ sont deux groupes, commutatif pour le premier, quelconque pour le second. On suppose également que la multiplication est distributive sur l'addition.

Ici, on considère l'ensemble $E := \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Sa structure de groupe commutatif $(E, +)$ est assurée par l'addition des couples telle qu'elle a été définie sur E en tant qu'*espace vectoriel canonique* de dimension 2 en (3). Il reste à définir la multiplication entre deux couples $u = (x, y)$ et $v = (x', y')$:

$$u \times v := (xx' - yy', xy' + yx').$$

Cette loi est associative et commutative et a pour élément neutre $(1, 0)$. On note⁹ $1 := (1, 0)$ et $i := (0, 1)$. Tout élément $u = (x, y)$ admet un inverse

$$u^{-1} := \frac{1}{x^2 + y^2}(x, -y). \quad (22)$$

Après toutes les vérifications nécessaires (exercice 12), l'ensemble $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ muni de ces deux lois a une structure de corps. On l'appelle le *corps des complexes* et on le note \mathbb{C} .

Exercice 12 ♦ Montrez que \mathbb{C} est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension 2 et que les vecteurs 1 et i en forment une base.

9. L'usage du même symbole 1 dans $1 := (1, 0)$ est un abus de langage qui sera légitimé par le calcul.

L'exercice 12 montre que tout nombre complexe $u = (x, y)$ s'écrit $u = x.1 + y.i$, donc $u : (x, y)$ dans la base $\{1, i\}$. La première composante de ce vecteur est appelée *partie réelle* notée $\Re(u)$ et la seconde *partie imaginaire* notée $\Im(u)$. Le *module* d'un nombre complexe u est défini par sa norme euclidienne en tant que vecteur du plan \mathcal{P} :

$$|u| := \|u\|. \quad (23)$$

On appelle *conjugué* d'un nombre complexe $u = (x, y)$, le nombre complexe noté $\bar{u} := (x, -y)$.

Exercice 13 ♦ Montrez que le module complexe est multiplicatif, i.e.

$$\forall (u, v) \in \mathcal{P} \quad |u \times v| = |u||v|.$$

Montrez que $u \times \bar{u} = |u|^2$. En déduire (22).

En raison de la multiplicativité du module, l'ensemble des nombres complexes dont le module est 1 — ce sont donc des vecteurs unitaires, si l'on considère la structure de \mathbb{R} -espace vectoriel de \mathbb{C} — forme un sous-groupe du groupe multiplicatif de \mathbb{C} que l'on note \mathbf{U} et qui est appelé *groupe unitaire*.

Proposition 2. L'application $m : \mathbb{C} \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ définie par

$$u = (a, b) \mapsto \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}. \quad (24)$$

est un morphisme de \mathbb{R} -algèbres. Elle induit un isomorphisme de groupes du groupe unitaire \mathbf{U} sur le groupe spécial orthogonal $\mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$.

L'*exponentielle complexe* est l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} définie par

$$\exp(u) := \sum_{n \geq 0} \frac{u^n}{n!}. \quad (25)$$

Cette définition a un sens car cette série entière converge avec un rayon de convergence infini (autrement dit, elle converge quelle que soit la valeur de $|u|$). On peut montrer que l'exponentielle est additive, i.e. $\exp(u + u') = \exp(u)\exp(u')$. On note e le nombre de *Neper* défini par $\exp(1)$. L'exponentielle est une fonction continue. Les propriétés algébriques de la fonction exponentielle complexe justifient de privilégier l'écriture e^u plutôt que

$\exp(u)$. On démontre les relations suivantes :

$$\begin{aligned}\overline{e^u} &= e^{\overline{u}} \\ |e^u| &= e^{\Re(u)}\end{aligned}$$

Autrement dit, si $u = x + iy$, $|e^{x+iy}| = e^x$ et en particulier $|e^{iy}| = 1$.

On définit respectivement les fonctions *cosinus* et *sinus* de la variable réelle θ comme la partie réelle et la partie imaginaire du nombre complexe $e^{i\theta}$:

$$\begin{aligned}\cos \theta &:= \Re(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}(e^{i\theta} + e^{-i\theta}) \\ \sin \theta &:= \Im(e^{i\theta}) = \frac{1}{2i}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})\end{aligned}$$

Exercice 14 ♥ Calculez $e^{i\theta}$ et $e^{-i\theta}$ en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$. Montrez que $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$.

Proposition 3. L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un morphisme du groupe additif de \mathbb{R} dans le groupe multiplicatif de \mathbb{C}^* . L'image de ce morphisme est le groupe unitaire \mathbf{U} . Son noyau est un sous-groupe discret non-trivial de $(\mathbb{R}, +)$.

Exercice 15 ♦ Démontrez la première partie de la proposition.

Le noyau de ce morphisme est donc l'ensemble des nombres réels θ tels que $e^{i\theta} = 1$. On déduit de la deuxième partie de la proposition que ce noyau est de la forme $\tau\mathbb{Z}$ où τ est un nombre réel > 0 . La périodicité de l'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ en découle et τ est sa plus petite période.

Définition 11. Le nombre π est la demi période de la fonction $\theta \mapsto e^{i\theta}$.

Exercice 16 ♦ Montrez les formules trigonométriques suivantes à partir de l'additivité de l'exponentielle :

$$\begin{aligned}\cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b\end{aligned}$$

En déduire que l'application $R: \mathbb{R} \rightarrow \mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$ définie par

$$R(\theta) := \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

est un morphisme de groupes, à la fois surjectif et périodique de période 2π .

On peut à présent définir formellement ce qu'est un angle. On considère deux vecteurs *unitaires* u et v . D'après la proposition 2, il existe une unique matrice A de $\mathbf{SO}_2(\mathbb{R})$ telle que $v = A.u$, on l'appelle *angle* des vecteurs u et v .

D'après la proposition 3, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ (pas nécessairement unique), tel que $A = R(\theta)$, on dit alors que θ est une *mesure de l'angle* A . Ceci se traduit par

$$v = e^{i\theta}.u.$$

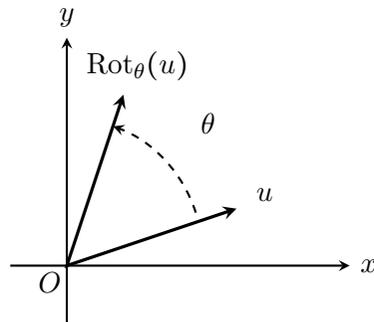
Définition 12. Si u et v sont deux vecteurs de \mathcal{P} , on définit l'angle $\angle(u, v) \in [0, \pi]$ par l'unique mesure θ de l'angle A appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$ telle que

$$\langle u | v \rangle = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(\theta). \quad (26)$$

Définition 13. On appelle *rotation d'angle* θ , ou *rotation vectorielle*, l'application $\text{Rot}_\theta: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ définie par $u \mapsto e^{i\theta}u$, ce qui se traduit sous forme matricielle, en notant $u = (x, y)$, par

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Rot}_\theta} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \quad (27)$$

Remarque. On parle de *rotation vectorielle* pour la distinguer d'une *rotation affine*, plus versatile puisqu'elle permet de « tourner » autour de n'importe quel point du plan, et pas uniquement l'origine 0.

FIGURE 2. Rotation d'angle θ

3. ESPACES AFFINES ET ESPACES PROJECTIFS

Le distinguo entre espaces affines et espaces vectoriels a principalement pour rôle de formaliser deux points de vue différents que l'on a du plan : un ensemble de « points » que l'on équipe d'opérations ponctuelles, ou un ensemble de « vecteurs » et d'opérations vectorielles. Ces deux visions du plan \mathcal{P} en tant qu'espace vectoriel ou en tant qu'espace affine coexistent évidemment en toute harmonie.

3.1. ESPACES AFFINES

Définition 14. Soit E un ensemble et V un K -espace vectoriel. Soit $\varphi : E \times E \rightarrow V$ une application satisfaisant :

- (1) $\forall (A, B) \in E \times E$ l'application $B \mapsto \varphi(A, B)$ est bijective ;
- (2) $\forall (A, B, C) \in E \times E \times E$, $\varphi(A, B) + \varphi(B, C) = \varphi(A, C)$.

Le couple (E, φ) est appelé **espace affine** défini sur V . Cette structure est généralement obtenue directement à partir d'un espace vectoriel E à l'aide de l'application $\varphi(A, B) := B - A$ et dans ce cas, il s'agit de l'**espace affine naturel** de E . Les éléments d'un espace affine sont appelés des **points**.

Nous travaillerons toujours dans l'espace affine naturel associé à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ appelé **plan affine**. Par conséquent, les points de cet espace affine sont aussi des vecteurs, tout dépend du point de vue auquel on se place. La notation \mathcal{P} désignera donc également le plan affine. Si A et B sont deux points du

plan affine, nous noterons \overrightarrow{AB} le vecteur $B - A$. La distance entre deux points est naturellement définie comme la distance entre les deux vecteurs, i.e. $d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\|$, que l'on notera plus souvent $|AB|$.

La première (resp. seconde) coordonnée d'un point $M = (x, y)$ dans le plan affine est appelée **abscisse** (resp. **ordonnée**). Soit Δ une droite vectorielle et $A = (x_A, y_A)$ un point du plan affine. On appelle **droite affine de direction Δ contenant A** l'ensemble des points $M = (x, y)$ de \mathcal{P} tels que $\overrightarrow{AM} \in \Delta$. Autrement dit si Δ a pour équation $ax + by = 0$, on doit avoir $a(x - x_A) + b(y - y_A) = 0$, soit

$$ax + by - (ax_A + by_A) = 0.$$

En notant que si A décrit le plan \mathcal{P} , alors $-(ax_A + by_A)$ décrit \mathbb{R} tout entier, l'équation générale d'une droite affine est obtenue pour trois scalaires a, b et c par

$$ax + by + c = 0.$$

Quand on parle de droite sans autre précision, c'est toujours d'une droite affine dont il est question.

Définition 15. Soit A et B deux points du plan. On appelle **segment AB** l'ensemble défini par

$$[A, B] := \{(1 - \lambda)A + \lambda B, \lambda \in [0, 1]\}.$$

Remarque. En géométrie élémentaire, un segment $[A, B]$ est plus simplement noté $[AB]$. Dans ce contexte $[A, B]$ est préférable, quand λ décrit l'intervalle $[0, 1]$, le point $(1 - \lambda)A + \lambda B$ décrit « l'intervalle » $[A, B]$.

Exercice 17 ♥ Montrez qu'une droite affine est la translatée d'une droite vectorielle. Montrez qu'il existe une unique droite qui passe par deux points distincts A et B . On parle alors de la droite AB que l'on note (AB) .

Deux droites sont dites **parallèles** si elles ont mêmes directions. Deux droites sont dites **orthogonales** ou **perpendiculaires** si leurs directions sont orthogonales.

Exercice 18 ♦ Montrez que toute droite est parallèle à elle-même. Montrez que pour que deux droites distinctes soient parallèles il faut et il suffit qu'elles n'aient aucun point commun. Montrez que deux droites qui ne sont pas parallèles ont un unique point commun.

Soit D une droite et M un point du plan \mathcal{P} . La droite orthogonale à D et qui passe par M rencontre la droite D en un point H (qui peut être confondu avec A si $A \in D$).

Proposition 4. Le point H est l'unique point de D le plus proche de M , autrement dit le seul point qui réalise le minimum de la fonction $P \mapsto |MP|$.

Ce point H est appelé le *projeté orthogonal* de M sur D . L'application $M \mapsto H$ est appelé *projection orthogonale du plan sur la droite D* .

Exercice 19 ♥ Montrez le théorème de Pythagore, à savoir, que pour que deux droites AB et AC soient orthogonales, il faut et il suffit que

$$AB^2 + AC^2 = BC^2.$$

Dans ce cas, on dit que le triangle ABC est rectangle en A .

La translation d'un point de l'espace affine est définie exactement de la même manière que dans un espace vectoriel, par contre on peut définir la rotation autour d'un point du plan affine, la rotation *rotation vectorielle* que nous avons étudiée plus haut consistant à tourner autour de l'origine :

Définition 16. On appelle *rotation d'angle θ autour d'un point I de \mathcal{P} ou rotation affine*, l'application $Rot_{(I,\theta)} : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ qui associe à un point M l'unique point M' tel que

$$\overrightarrow{IM'} = Rot_{\theta}(\overrightarrow{IM}). \quad (28)$$

où Rot_{θ} désigne la rotation vectorielle d'angle θ . Quand $\theta = \pi$, la rotation $Rot_{(I,\pi)}$ s'appelle *symétrie* de centre I .

Soit H la projection orthogonale d'un point M sur une droite D et M' le point défini par $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$. L'application $Sym_D : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ définie par

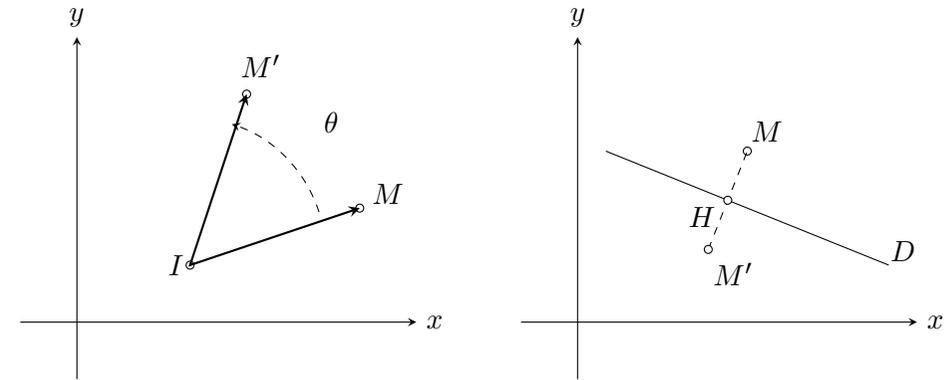


FIGURE 3. À gauche : rotation de centre I et d'angle θ . À droite : symétrie orthogonale par rapport à la droite D .

$M \mapsto M'$ est appelée *symétrie orthogonale* par rapport à la droite D , ou encore symétrie d'axe D .

Exercice 5 ♦ Écrivez une fonction *Python* `RotationCentre(I,theta,M)` qui renvoie les coordonnées du point M' obtenu par rotation du point M autour du centre I et de mesure d'angle `theta`. Indication : si $t_{\overrightarrow{AB}}$ désigne la translation de vecteur \overrightarrow{AB} , alors

$$Rot_{(I,\theta)} = t_{\overrightarrow{MI}} \circ Rot_{(I,\theta)} \circ t_{\overrightarrow{IM}}.$$

Exercice 20 ♠ Démontrez la proposition 4. Montrez que les translations et les rotations conservent les angles et les distances. Montrez qu'une symétrie orthogonale conserve les distances et change les angles en leurs opposés. Quels sont les points fixes d'une symétrie orthogonale?

Exercice 21 ♦ On appelle *milieu* d'un segment $[A, B]$, l'unique point du plan I tel que $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0}$. Il vérifie $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$. Supposons que $A \neq B$. Montrez que l'ensemble des points du plan qui sont à égale distance entre A et B est la droite

orthogonale à (AB) qui passe par le milieu du segment $[A, B]$. On l'appelle la *médiatrice* du segment AB .

Exercice 22 ♠ Démontrer que les isométries du plan, i.e. les applications de \mathcal{P} dans \mathcal{P} qui conservent les distances ($|f(A)f(B)| = |AB|$) sont le produit (composition) de 0, 1, 2 ou 3 symétries orthogonales.

Définition 17. Considérons une famille M_1, \dots, M_n de n points du plan et une famille $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de n nombres réels. Soit Λ la somme de ces n nombres. On appelle *barycentre* de la famille de points M_i le point G défini par

$$G := \frac{1}{\Lambda} \sum_{i=1}^n \lambda_i M_i. \quad (29)$$

Les scalaires λ_i sont appelés *poids* ou *coefficients de pondération* du système de points. On dit que la pondération est normalisée quand $\Lambda = 1$.

Exercice 23 ♥ Montrez que le barycentre d'un système de points est l'unique point qui satisfait

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{GM_i} = 0.$$

3.2. ESPACES PROJECTIFS

Une des motivations pour la construction des espaces projectifs est de trouver un cadre théorique adapté à l'étude des perspectives. Tout étudiant a appris ici même que deux droites parallèles ne se coupent pas, alors que l'architecte sait pertinemment qu'elles se coupent à l'infini, ce que le dessin en perspective montre bien. Alors quel résultat est vrai ? En fait, les deux. Tout dépend de la géométrie que l'on considère.

L'utilisation des espaces projectifs dans ce cours d'infographie 2D est essentiellement motivée par la simplification des transformations planes. Plus précisément, la translation, qui n'est pas une transformation linéaire dans

le plan, le devient dans le plan projectif. Ce résultat, apparemment anodin a pourtant une conséquence fort intéressante pour l'infographiste, la seule transformation élémentaire du plan qui échappait à une écriture matricielle peut enfin être composée de manière efficace dans les programmes informatiques.

Remarque. L'étude des perspectives étant largement abordée par les infographistes 3D, il nous a semblé qu'une brève introduction aux espaces projectifs n'était pas inutile dans le cadre de ce cours « 2D » afin de comprendre comment cette notion a été codée mathématiquement.

Si deux droites parallèles dans le plan affine ne se coupent pas, on remarque néanmoins qu'elles ont un point commun (dans tous les sens du terme !), leur direction. L'idée maîtresse pour réaliser l'intersection "à l'infini" de deux droites parallèles est d'intégrer intelligemment cette composante directionnelle dans l'écriture des points.

Définition 18. Soit $(E, +, \cdot)$ un K -espace vectoriel de dimension finie $n+1$. On appelle *espace projectif* de dimension n associé à E , l'ensemble des classes d'équivalence de $E^* := E \setminus \{0\}$ pour la relation \parallel de colinéarité :

$$v \parallel u \Leftrightarrow \exists \lambda \in K \ v = \lambda u. \quad (30)$$

On note $\mathbb{P}(E)$ cet espace et $\mathbb{P}_n(\mathbb{R})$ l'espace $\mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$.

Exercice 24 ♥ Montrez que la relation de colinéarité définie en (30) est une relation d'équivalence sur E .

Soit $e = (e_1, \dots, e_{n+1})$ une base de l'espace vectoriel $(E, +, \cdot)$ (typiquement l'espace canonique $(\mathbb{R}^{n+1}, +, \cdot)$). Tout représentant $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$ d'une classe $\chi \in \mathbb{P}(E)$, définit un *système de coordonnées homogènes* de χ relativement à la base e , on le note $x : (x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1})$. Bien sûr, tout vecteur $v := \lambda u$ colinéaire à u définit le même système de coordonnées de χ .

Intéressons nous plus particulièrement à la construction du *plan projectif* $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ qui est l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ pour la relation de colinéarité. Soit $u = (x, y, z)$ un vecteur de \mathbb{R}^3 . Sa classe d'équivalence est constituée de tous les vecteurs de la forme $(\lambda x, \lambda y, \lambda z)$ et si l'on suppose que $z \neq 0$, on peut choisir $\lambda := \frac{1}{z}$ et donc $(\frac{x}{z} : \frac{y}{z} : 1)$ comme

système de coordonnées. Ainsi, quand (x, y) décrit \mathbb{R}^2 , le vecteur $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$ décrit le plan affine P de \mathbb{R}^3 d'équation $z = 1$ que l'on peut naturellement identifier au plan réel $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (plan rouge dans la figure 4).

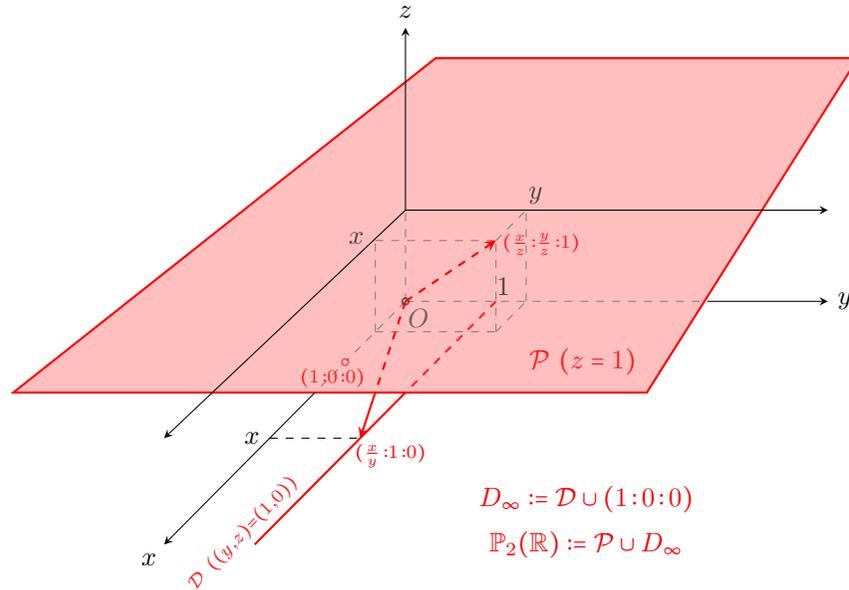


FIGURE 4. Représentation affine du plan projectif $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$.

Il reste à considérer les classes des vecteurs $u = (x, y, 0)$. Les vecteurs colinéaires à $(x, y, 0)$ sont de la forme $(\lambda x, \lambda y, 0)$ et si $y \neq 0$, en posant $\lambda = 1/y$, le point $(x/y : 1 : 0)$ est un représentant de la classe. Ainsi quand x décrit \mathbb{R} , le vecteur $(\frac{x}{y}, 1, 0)$ décrit la droite affine \mathcal{D} de \mathbb{R}^3 d'équation $(y, z) = (1, 0)$. Pour achever cette construction, il ne reste plus qu'à déterminer la classe des vecteurs du type $(x, 0, 0)$. Le vecteur nul étant exclu de l'espace projectif, on a $x \neq 0$ et donc $(1 : 0 : 0)$ représente la classe de $(x, 0, 0)$.

La réunion des classes $(\frac{x}{y} : 1 : 0)$ et $(1 : 0 : 0)$ est appelée *droite à l'infini* et notée D_∞ qui n'est rien d'autre que $\mathbb{P}_1(\mathbb{R})$. On peut donc résumer tout ceci en disant que $\mathbb{P}_2(\mathbb{R}) = P \cup D_\infty$. Notons que le choix de $z = 1$ et $y = 1$ pour cette représentation est parfaitement arbitraire et nous aurions pu faire cette construction avec toute autre représentation.

Remarque. De manière plus générale, on peut montrer que $\mathbb{P}_n(K) = K^n \cup \mathbb{P}_{n-1}(K)$ où $\mathbb{P}_{n-1}(K)$ est appelé *hyperplan à l'infini*.

Observons à présent en quoi ce nouveau cadre géométrique résout le problème de l'intersection de droites parallèles, mais pour cela il faut avant tout définir ce qu'est une droite dans le cadre du plan projectif.

Soit a, b et c trois scalaires réels et considérons le plan vectoriel de \mathbb{R}^3 d'équation

$$ax + by + cz = 0. \quad (31)$$

Ce plan coupe le plan P sur une droite affine D d'équation

$$(ax + by + c = 0) \wedge (z = 1)$$

puisque le plan P a pour équation $z = 1$. On définit donc une *droite projective* comme l'ensemble des classes d'équivalence des points du plan vectoriel de \mathbb{R}^3 d'équation (31).

Dans la figure 5, les droites projectives D et D' sont codées dans \mathbb{R}^3 par deux plans qui coupent le plan projectif P en deux droites affines parallèles. Ces deux plans ont pour intersection une droite vectorielle qui coupe le plan projectif $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ sur la droite à l'infini D_∞ . Ainsi, deux droites projectives parallèles se coupent à l'infini. Il faut bien noter que ceci est une *modélisation* d'une idée, ainsi les « droites » D et D' se coupent à l'infini parce que le vocabulaire a été bien choisi.

Pour conclure ce paragraphe, on peut donc étudier les objets affines à travers leurs homologues dans un espace projectif. Ainsi le plan projectif $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$ est appelé le *complété projectif* du plan affine \mathcal{P} .

Pour une droite affine D d'équation $ax + by + c = 0$, son complété projectif est la droite projective d'équation (31). Pour la construction de la partie plane P de $\mathbb{P}_2(\mathbb{R})$, nous avons supposé que $z \neq 0$. Dans ce cas on dit que l'on a *homogénéisé* la droite D en z . Si nous avons homogénéisé en y , la droite projective associée à D aurait eu pour équation $ax + cy + bz = 0$. Ce choix est parfaitement arbitraire.

3.3. TRANSFORMATIONS DANS LE COMPLÉTÉ PROJECTIF DU PLAN RÉEL

Les transformations dans le plan réel désignent des applications du plan dans lui-même et sont évidemment fondamentales pour l'infographie. Nous

- (2) On transporte la courbe normalisée dans une *fenêtre écran* de hauteur MaxY et de longueur MaxX . Cette deuxième transformation est la composition d'une symétrie S par rapport à la droite d'équation $y = 1/2$, puis d'une seconde homothétie différentielle H' qui renvoie la courbe dans la fenêtre écran (figure 6).

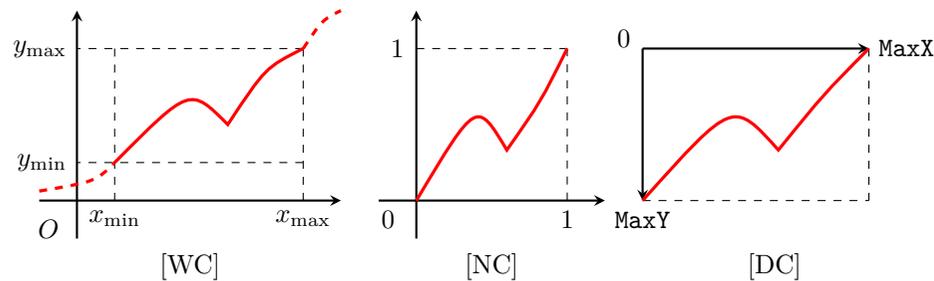


FIGURE 6. Représentation d'une courbe plane sur un écran :
WORLD COORD. → NORMALIZED COORD. → DISPLAY COORD.

- (1) Écrivez les matrices représentant les transformations T , H , S et H' dans l'espace projectif.
- (2) Calculez la composition $H' \circ S \circ H \circ T$ de ces transformations.
- (3) Concluez que le point (x, y) aura pour coordonnées

$$\left(\begin{array}{c} \frac{\text{MaxX}}{x_{\text{max}} - x_{\text{min}}} (x - x_{\text{min}}) \\ \frac{\text{MaxY}}{y_{\text{max}} - y_{\text{min}}} (y_{\text{max}} - y) \end{array} \right)$$

dans la fenêtre écran.

Remarque : si les rapports hauteur/largeur de la fenêtre d'observation et de la fenêtre écran sont distincts, la courbe sera bien entendu déformée.

Travaux Pratiques 6 ♥ Écrivez un programme `poly` en C dont les paramètres de la ligne de commande sont : `xmin xmax nb a0 a1 ... an` et qui affiche `nb` points de la courbe polynomiale définie par le polynôme $P(X) = a_0X + a_1X + \dots + a_nX^n$. Ces `nb` points (x, y) sont obtenus en évaluant les `nb` abscisses uniformément réparties entre `xmin` et `xmax`. Le programme doit renvoyer sur la sortie standard `nb` lignes composées de deux nombres de type `float` séparés par un espace, ces

deux nombres représentant le couple $(x, p(x))$. Pour l'évaluation d'un réel x , on utilise la factorisation de *Hörner* du polynôme $P(X)$:

$$\begin{aligned} P(X) &= a_0 + a_1X + a_2X^2 + \dots + a_nX^n \\ &= a_0 + X(a_1 + X(a_2 + X(a_3 + \dots + X(a_{n-1} + Xa_n)\dots))) \end{aligned}$$

Cette évaluation est implantée en C de la manière suivante :

```
float eval_poly(float *P, float x, unsigned char n)
{
    unsigned char i;
    float y;

    y = 0;
    for (i = 0; i <= n; i++)
        y = x * y + P[n - i];
    return y;
}
```

Travaux Pratiques 7 ♥ Écrivez un programme qui lit les coordonnées de N points du plan dans un fichier texte (chaque ligne du fichier contient l'abscisse x et l'ordonnée y d'un point séparés par un espace) et qui trace ces points dans une fenêtre écran dont vous fixerez la taille. Vous déterminerez automatiquement les coordonnées de la fenêtre d'observation en calculant la plus petite et la plus grande abscisse ainsi que la plus petite et la plus grande ordonnée. Modifiez votre programme pour qu'il propose de sauvegarder dans un fichier les coordonnées normalisées de ces points. Utilisez les résultats de l'exercice 26 et le TP 6.

4. SEGMENTS DE DROITES ET ARCS DE CERCLE

4.1. SEGMENTS, ALGORITHME DE BRESENHAM

Nous allons étudier un algorithme très simple et très commun pour tracer un segment de droite $[AB]$, l'algorithme de *Bresenham*. On suppose que A et B sont des points de la fenêtre écran dans laquelle on veut faire le tracé, autrement dit les coordonnées de deux pixels. Néanmoins il sera nécessaire de mettre ce segment en équation, leurs coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) sont donc supposées être le centre des pixels A et B quand on quadrille le plan. D'autre part, nous allons supposer que ce segment appartient au premier octant du plan euclidien centré en A , autrement dit

la première part de « pizza » dans l'ordre trigonométrique quand on coupe le plan en 8 part égales autour de A . On supposera pour terminer que $x_A < x_B$. Dans toute la suite, y compris la section suivante sur le tracé de cercles, un pixel est une surface carrée du plan euclidien de coté 1 définie par les coordonnées de son centre.

L'algorithme de Bresenham a trois qualités remarquables en algorithmique géométrique :

- (1) Il est *incrémental*, c'est-à-dire qu'à chaque étape les nouvelles positions sont obtenues à partir de la dernière position calculée. Le tracé se fait en incrémentant un compteur qui décrit une des deux coordonnées du pixel à traiter, le calcul de l'autre coordonnée étant justement l'objet de l'algorithme ;
- (2) Les données sont de type *entier*, il n'y a pas de calculs coûteux d'arrondis ;
- (3) Les opérations arithmétiques se limitent à des additions et des soustractions, ce qui réduit encore le coût algorithmique puisqu'aucun produit/division n'est utilisé.

On se limite au premier octant pour deux raisons : la première est que l'on peut obtenir un tracé dans n'importe quel autre octant avec des symétries très simples (voir l'exercice 27), la seconde est que l'algorithme de Bresenham repose sur l'hypothèse que la pente de la droite est strictement inférieure à 100%, (i.e. $\pi/4$) pour obtenir le résultat suivant :

Lemme 1. Soit M un point quelconque du segment $[A, B]$ (dans le premier octant) d'abscisse entière p . Si q désigne l'ordonnée du pixel $P = (p, q)$ qui contient M , alors $[A, B]$ traverse le pixel $L := (p + 1, q)$ ou le pixel $H := (p + 1, q + 1)$ (ou inclusif).

Démonstration. Utiliser l'hypothèse du premier octant. \square

L'algorithme de Bresenham s'appuie sur le résultat du lemme 1 et consiste donc « simplement » à incrémenter une abscisse x initialisée à x_A et à sélectionner l'un des deux pixels L ou H . Le critère qui va déterminer le choix est le suivant : on calcule le point d'intersection I entre le segment $[AB]$ et le segment $[LH]$; on choisit le pixel L si la distance $d(I, L)$ est inférieure à la distance $d(I, H)$ et le pixel H dans le cas contraire. Il reste à

présent à triturer les expressions de ces distances pour simplifier le critère qui permettra de prendre la décision.

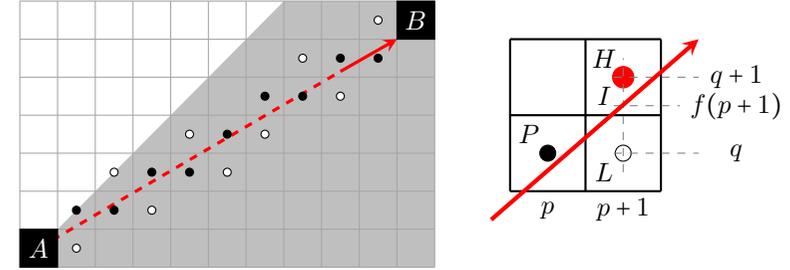


FIGURE 7. Algorithme de Bresenham : 1er octant sur fond gris, disques pour les centres des pixels L et H , ceux déjà choisis en noir, le prochain en rouge.

On désigne par f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que la droite (AB) soit définie par l'équation cartésienne $y = f(x)$. On définit alors les deux quantités dont le quotient est la pente de cette droite :

$$\Delta_x := x_B - x_A, \quad \Delta_y := y_B - y_A. \quad (32)$$

Si $P := (p, q)$ est le dernier pixel choisi par l'algorithme (initialement $P := A$), le prochain a $p+1$ pour abscisse et donc $f(p+1)$ pour ordonnée. Le signe de la longueur $|HI| - |IL|$ permet de déterminer quel est le pixel à allumer, L s'il est positif et H s'il est négatif. On a $|HI| - |IL| = 2(q - f(p+1)) + 1$ et comme $f(p+1) = f(p) + \Delta_y/\Delta_x$, on obtient

$$|HI| - |IL| = 2(q - f(p) - \Delta_y/\Delta_x) + 1$$

On peut multiplier l'inégalité $|HI| - |IL| > 0$ par Δ_x qui est positif pour obtenir le test

$$2\Delta_x(q - f(p)) + (\Delta_x - 2\Delta_y) > 0. \quad (33)$$

Les quantités $2\Delta_x$ et $\Delta_x - 2\Delta_y$ sont évidemment calculées une fois pour toute à l'initialisation de l'algorithme et le test (33) devient très simple. On pourrait donc en rester là, mais il reste une multiplication que l'on peut encore éviter. Notons R_p la partie gauche de cette inégalité. à l'initialisation du processus, $q = f(p)$ et donc $R_0 = \Delta_x - 2\Delta_y$. Le premier test se limite donc

à déterminer le signe de $\Delta_x - 2\Delta_y$. La quantité R_{p+1} vaut respectivement :

$$R_{p+1} = \begin{cases} 2\Delta_x(q+1 - f(p+1)) + \Delta_x - 2\Delta_y, & \text{si on a allumé } H. \\ 2\Delta_x(q - f(p+1)) + \Delta_x - 2\Delta_y, & \text{si on allumé } L. \end{cases}$$

Plutôt que de recalculer R_{p+1} ex-nihilo, nous allons calculer la différence $R_{p+1} - R_p$ qui va s'avérer très simple :

$$R_{p+1} - R_p = \begin{cases} 2(\Delta_x - \Delta_y), & \text{si on a allumé } H. \\ -2\Delta_y, & \text{si on a allumé } L. \end{cases}$$

L'algorithme devient très simple à présent, on initialise le processus en calculant le signe de $R_0 = \Delta_x - 2\Delta_y$ et selon le résultat, on calcule R_1 en ajoutant l'une des deux quantités précalculée.

Exercice 27 ♥ Trouvez des critères simples (au sens du coût algorithmique) pour déterminer dans quel octant se trouve un point (x, y) du plan.

Exercice 28 ♥ Écrivez l'algorithme de Bresenham sans qu'aucun produit ou rapport ne soit calculé (la multiplication par 2 est négligée car elle correspond à un shift des bits du registre associé d'un cran vers la droite). Déclarez une variable R qui jouera le rôle de R_p ci-dessus initialisée à $\Delta_x - 2\Delta_y$.

4.2. ARCS DE CERCLE, ALGORITHME DE MICHENER

Dans le même esprit que Bresenham, nous trouvons l'*algorithme de Michener* pour le tracé de cercles. Nous supposons que le cercle est centré en l'origine dans le repère de la fenêtre écran, une simple translation permettant de centrer le cercle en tout autre point du plan. De même le rayon r du cercle est relatif à un nombre de pixels. Avant d'étudier cet algorithme, notons qu'il est possible de réaliser un tracé avec un coût algorithmique réduit en utilisant la fonction de rotation (27) sous forme matricielle qui ne nécessite qu'un seul calcul de cosinus et de sinus. On évitera bien entendu de décrire un cercle de rayon r à l'aide des fonctions paramétrées $r \cos \theta$ et $r \sin \theta$.

Le tracé se fait dans le sens des aiguille d'une montre et commence par le pixel au sommet du cercle. En supposant que le tracé se limite au deuxième octant, on peut montrer (cf. lemme 2) que lors du tracé, le prochain pixel à allumer est soit le pixel juste à droite du pixel courant (incrément de l'abscisse uniquement) soit le pixel au sud-est (incrément de l'abscisse et de l'ordonnée). Autrement dit, on incrémente systématiquement l'abscisse, le décrémentation ou non de l'ordonnée est laissé à la charge de l'algorithme.

Le but du lemme suivant est donc de montrer que dans le deuxième octant, le cercle de centre O et de rayon r traverse au plus deux pixels contigus de même abscisse p .

Exercice 29 ♦ Soit $P = (p, q)$ un pixel du deuxième octant et C un cercle de centre O et de rayon r . Quelle est l'abscisse p_{\max} la plus grande telle que la droite d'équation $x = p_{\max}$ coupe C dans le deuxième octant ?

Lemme 2. On se fixe une abscisse entière $0 \leq p \leq p_{\max}$ et on note $P = (p, q)$ le pixel le plus proche du cercle de centre O et de rayon r . Alors le pixel d'abscisse $p+1$ le plus proche du cercle est le pixel $L := (p+1, q)$ ou le pixel $H := (p+1, q-1)$.

Démonstration. Il suffit de montrer que H est à l'extérieur du cercle et L à l'intérieur, autrement dit que le cercle passe entre les points H et L . On le montre avec une récurrence sur p . C'est évidemment vrai pour $p=0$ (dans ce cas, $q=r$). Soit y_p (resp. y_{p+1}) l'ordonnée du point du cercle d'abscisse p (resp. $p+1$). La tangente en tout point du cercle sur le deuxième octant a une pente inférieure à 100%, le cercle étant sous la tangente, on a donc $y_p - y_{p+1} \leq 1$, autrement dit que quand on se déplace sur le cercle d'une unité vers la droite, on descend d'au plus d'une unité, le résultat souhaité s'en déduit directement. \square

Logiquement le choix devrait se faire en comparant les distances h et l des pixels H et L par rapport au cercle (voir figure (8)), mais nous allons voir qu'il est plus avantageux en terme de calculs de comparer les quantités $\bar{h} := |OH|^2 - r^2$ et $\bar{l} := r^2 - |OL|^2$.

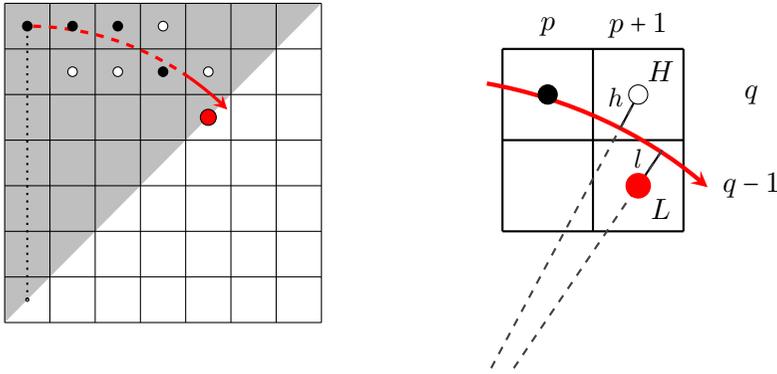


FIGURE 8. Algorithme de Michener : 2^{ème} octant matérialisé en gris, cercles pour les centres des pixels, ceux déjà choisis en noir, le prochain en rouge.

Lemme 3.

$$\bar{h} > \bar{l} \iff h > l.$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} (h+r)^2 &= |OH|^2 = q^2 + p^2 \\ (r-l)^2 &= |OL|^2 = (q-1)^2 + p^2. \end{aligned}$$

En sommant les deux quantités :

$$\begin{aligned} (h+r)^2 + (r-l)^2 &= |OH|^2 + |OL|^2 \\ &= \bar{h} + r^2 + r^2 - \bar{l}. \end{aligned}$$

Et en simplifiant les deux expressions, on obtient :

$$\bar{h} - \bar{l} = h^2 + l^2 + 2r(h-l).$$

Il est donc évident que $h-l \geq 0$ entraîne $\bar{h} - \bar{l} \geq 0$, mais dans quelle mesure peut-on avoir $h-l < 0$ avec $\bar{h} - \bar{l} \geq 0$? Si cette situation est possible, cela entraînerait une erreur de diagnostic sur la position effective du cercle par rapport aux deux pixels H et L . Notons $f(h,l) := h^2 + l^2 + 2r(h-l)$. Un rapide calcul montre que

$$f(h,l) = (h+r)^2 + (l-r)^2 - 2r^2,$$

et la portion du plan défini par les points (h,l) satisfaisant l'inégalité $f(h,l) > 0$ est donc l'extérieur du cercle de centre $(-r,r)$ et de rayon $r\sqrt{2}$. Il faut donc à présent chercher l'intersection du demi-plan défini par $h < l$ et l'extérieur de ce cercle pour trouver les points (h,l) qui peuvent poser un problème dans le test. □

5. COURBES DE BÉZIER

5.1. COURBES DE BÉZIER SIMPLES

Les *courbes de Bézier* et les *surfaces de Bézier* ont été développées par P. Bézier dans les années 70 pour la création d'éléments de surface chez Renault pour tracer la « peau » des véhicules, c'est-à-dire la carrosserie. Le principe est relativement simple, on se donne un ensemble de $n+1$ points du plan appelés *points de contrôle* et on cherche à construire une courbe plane qui soit la plus proche de ces points et inscrite dans l'enveloppe convexe de ces $n+1$ points.

L'idée consiste à construire une famille de points qui sont les barycentres de notre famille de $n+1$ points de contrôle. Mais avant de définir cette courbe, revenons sur quelques éléments fondamentaux :

Comment allons-nous représenter une courbe plane? Si on fait le choix classique d'une représentation cartésienne, i.e. les points $M = (x,y)$ de la courbe sont définis par une équation du type

$$y = f(x), \tag{34}$$

alors nous sommes confrontés à un problème insurmontable du point de vue de l'infographie, il est impossible de dessiner toutes les courbes! En effet, un simple cercle ne peut pas être représenté de cette manière. La raison est extrêmement simple, f étant une fonction, il n'est pas possible de lui associer deux images. C'est pourtant ce que l'on voudrait pouvoir faire et même au-delà. On pourrait alors utiliser une représentation *implicite* de la courbe, en considérant les points $M = (x,y)$ solutions de l'équation

$$f(x,y) = 0, \tag{35}$$

mais cela sous-entend que pour un x fixé (ou symétriquement pour un y) il faut résoudre l'équation (35) en y (ou x) ce qui n'est pas toujours possible de manière algébrique si l'expression de f est trop compliquée. En

revanche, cette question est immédiatement réglée en faisant le choix d'une représentation paramétrique des points de la courbe :

$$M(u) = \begin{pmatrix} X(u) \\ Y(u) \end{pmatrix} \quad u \in I. \quad (36)$$

On a donc une application $M : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Ainsi, le cercle de rayon r et de centre $(0, 0)$ a pour représentation paramétrique :

$$M(u) = \begin{pmatrix} r \cos u \\ r \sin u \end{pmatrix} \quad u \in [0, 2\pi]. \quad (37)$$

Un autre avantage de cette représentation est que l'on peut définir naturellement une *orientation* de la courbe. En effet, l'application M est définie sur un intervalle I de \mathbb{R} et il est légitime de considérer que l'orientation de la courbe est obtenue en faisant croître le paramètre u dans cet intervalle. Autrement dit, on considère que le point $M(u)$ « précède » le point $M(v)$ si et seulement si $u \leq v$, ce que l'on note $M(u) < M(v)$.

Introduisons maintenant une famille de polynômes qui vont servir à définir les courbes de Bézier :

Définition 19. Soit n un entier strictement positif. On appelle p -ème *polynôme de Bernstein* d'ordre n le polynôme de $\mathbb{R}[T]$ défini par :

$$B_{n,p}(T) := \binom{n}{p} T^p (1-T)^{n-p} \quad (38)$$

où $\binom{n}{p}$ est le p -ème coefficient binomial, i.e. $n!/(p!(n-p)!)$.

Il faut noter qu'un polynôme n'est pas une application ! On utilise en fait la *fonction polynomiale* associée au polynôme de Bernstein pour laquelle on donnera le domaine de définition.

Proposition 5. Les *polynômes de Bernstein* satisfont l'égalité suivante :

$$\sum_{p=0}^n B_{n,p}(u) = 1 \quad \forall u \in [0, 1]. \quad (39)$$

Preuve. La formule du binôme de Newton nous donne pour tout $0 \leq p \leq n$:

$$(T + (1-T))^n = 1 = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} T^p (1-T)^{n-p} = \sum_{p=0}^n B_{n,p}(T).$$

□

On peut alors construire une courbe \mathcal{C} dont les points $M(u)$ sont les barycentres des points de contrôle M_p , $0 \leq p \leq n$ affectés respectivement des coefficients $B_{n,p}(u)$, $0 \leq p \leq n$, u variant dans l'intervalle $[0, 1]$ (l'égalité (39) évite simplement de normaliser la pondération puisque la somme des coefficients est 1). Notons que toute permutation non-triviale des points de contrôle aboutit à des barycentres différents.

Définition 20. On appelle *courbe de Bézier* de degré n , de *points de contrôle* M_p , $0 \leq p \leq n$, la courbe paramétrique définie par les points suivants :

$$M(u) = \sum_{p=0}^n B_{n,p}(u) M_p \quad u \in [0, 1]. \quad (40)$$

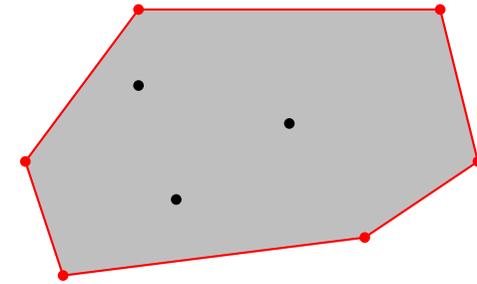


FIGURE 9. Enveloppe convexe des *points de contrôle* matérialisée en gris.

Nous allons montrer qu'une courbe de Bézier est incluse dans l'*enveloppe convexe* de ses points de contrôle. D'après la définition 15, le segment $[A, B]$ est l'ensemble des barycentres des points A et B pondérés par des valeurs positives. D'autre part, une partie P d'un \mathbb{R} -espace vectoriel E est dite *convexe* si et seulement si

$$\forall (A, B) \in P \times P, [A, B] \subseteq P.$$

Ainsi, si deux points A et B appartiennent à F , alors tout le segment appartient à F . De manière très imagée, l'enveloppe convexe d'un ensemble de points du plan est la région intérieure délimitée par un élastique que l'on aurait tendu puis relâché autour de tous ces points. Plus formellement, il

est évident que l'intersection de deux convexes est une partie convexe, on peut donc écrire

Définition 21. On appelle **enveloppe convexe** d'une famille (finie ou infinie) \mathcal{M} de points d'un espace vectoriel, l'intersection de toutes les parties convexes qui contiennent \mathcal{M} . On la note $\text{env}(\mathcal{M})$.

Il est faux de dire qu'il s'agit de la plus petite partie convexe (au sens de l'inclusion) qui contient \mathcal{M} , en effet, l'inclusion n'est pas une relation d'ordre totale, on pourrait donc au mieux parler de convexes minimaux contenant \mathcal{M} et on n'aurait pas l'unicité.

Théorème 2. L'enveloppe convexe d'une famille finie $\mathcal{M} := (M_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ de points d'un \mathbb{R} -espace vectoriel est l'ensemble des barycentres de ces points :

$$\text{env}(\mathcal{M}) = \left\{ \sum_{i=0}^n u_i M_i \mid (u_i \geq 0) \wedge \sum_{i=0}^n u_i = 1 \right\}.$$

Démonstration. L'ensemble des barycentres des points M_i est évidemment une partie convexe qui contient ces points, elle contient donc l'enveloppe convexe de ces points. Réciproquement, soit M un barycentre des points M_i . On peut construire M de proche en proche en calculant la succession de barycentres de deux points uniquement, donc dans l'enveloppe convexe qui contient tous les M_i . \square

Corollaire. Une courbe de Bézier est contenue dans l'enveloppe convexe de ses points de contrôle.

Preuve. L'expression (38) montre que les fonctions polynomiales de Bernstein sont toutes positives sur l'intervalle $[0, 1]$, il suffit alors de remarquer que l'enveloppe convexe est constituée de tous les barycentres des M_i , or d'après les expressions (39) et (40), la courbe de Bézier est une famille particulière de barycentres des points de contrôle. \square

Exercice 30 ♥ Montrez que l'on a les valeurs particulières des fonctions polynomiales de Bernstein suivantes ($0 < p < n, n \neq 0$) :

$$B_{n,0}(0) = 1, \quad B_{n,0}(1) = 0, \quad B_{n,p}(0) = 0, \quad B_{n,p}(1) = 0, \quad B_{n,n}(0) = 0, \quad B_{n,n}(1) = 1.$$

En déduire que les courbes de Bézier passent nécessairement par les points de contrôle extrémaux, i.e. par M_0 et M_n .

Exercice 31 ♦ Écrivez un algorithme en $\Theta(n)$ pour calculer les coefficients des polynômes de Bernstein de degré n en utilisant le triangle de Pascal (on suppose que le triangle de Pascal est précalculé).

Théorème 3. Les polynômes de Bernstein $B_{n,p}(T), 0 \leq p \leq n$, forment une base de l'espace $\mathbb{R}_n[T]$ des polynômes de degré au plus n sur \mathbb{R} .

Exercice 32 ♠ Démontrez le théorème 3. Déduisez de ce résultat comment déterminer les n points de contrôle de la courbe de Bézier égale à une courbe polynomiale de degré n fixée.

On peut donc représenter tout polynôme de degré inférieur à n à l'aide d'une combinaison linéaire de polynômes de Bernstein. Cette propriété est évidemment fondamentale, elle exprime le fait que les polynômes de Bernstein de degré n permettent de représenter toutes les courbes obtenues à l'aide de polynômes de degrés inférieurs à n .

Notons au passage que l'espace des fonctions polynomiales à coefficients dans \mathbb{Q} est dense dans l'espace des fonctions continues réelles, autrement dit, on peut approcher d'aussi près que l'on veut n'importe quelle courbe à l'aide de courbes polynomiales à coefficients dans \mathbb{Q} . C'est l'objet du théorème de Weierstrass et du corollaire qui suivent.

Théorème 4 (Weierstrass). Soit a et b deux nombres réels. Toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ peut être approchée uniformément d'aussi près que l'on veut par des fonctions polynomiales. Autrement dit, le \mathbb{R} -espace vectoriel des fonctions polynomiales associé à $\mathbb{R}[X]$ est partout dense dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ pour la norme uniforme $\| \cdot \|_\infty$ définie par

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|.$$

Preuve. voir [?] \square

Corollaire. $\mathbb{Q}[X]$ est partout dense dans $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

Preuve. On veut montrer que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un polynôme $q(X)$ à coefficients dans \mathbb{Q} tel que

$$\|f(x) - q(x)\|_\infty < \epsilon.$$

D'après le théorème de Weierstrass 4, il existe un polynôme $p(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_nX^n$ à coefficients réels tel que

$$\|f(x) - p(x)\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}. \quad (41)$$

On sait par ailleurs [?] que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} pour la topologie associée à la norme usuelle $|\cdot|$. Alors, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, il existe une suite $(a_n^{(i)})_j$, $j \in \mathbb{N}$, telle que

$$\forall \epsilon_i > 0, \exists N_i \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_i, |a_n^{(i)} - a_i| < \epsilon_i. \quad (42)$$

Notons $q(X)$ le polynôme $a_m^{(0)} + a_m^{(1)}X + \dots + a_m^{(n)}X^n$. On en déduit qu'il existe toujours un entier M tel que pour tout $m \geq M$ on a

$$\|p(x) - q(x)\|_\infty < \frac{\epsilon}{2}. \quad (43)$$

On conclut avec (41) et l'inégalité triangulaire :

$$\begin{aligned} \|f(x) - q(x)\|_\infty &= \|f(x) - p(x) + p(x) - q(x)\|_\infty \\ &\leq \|f(x) - p(x)\|_\infty + \|p(x) - q(x)\|_\infty \\ &< \epsilon \end{aligned}$$

□

Mais quel rapport y-a-t-il entre ces propriétés de densité *a priori* purement mathématiques et l'infographie ? Le théorème de Weierstrass nous dit que l'on peut se contenter de tracer des courbes polynomiales car elles permettent d'approcher d'aussi près que l'on veut n'importe quelle courbe continue, on ne perd donc rien en généralité. La densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R} nous permet d'affirmer qu'il est inutile de considérer des polynômes à coefficients dans \mathbb{R} et que l'on peut se contenter de coefficients rationnels ce qui est bien pratique quand on écrit des programmes, car rappelons le, les nombres réels ne sont représentés en machines que par un très petit nombre de rationnels.

Exemple. Considérons le cas d'une cubique de Bézier ($n = 3$) dont les 4 points de contrôle sont $M_0 = (0, 1)$, $M_1 = (2, 5)$, $M_2 = (5, 4)$ et $M_3 = (6, 0)$.

Les polynômes de Bernstein sont les suivants :

$$B_{3,0}(T) = -T^3 + 3T^2 - 3T + 1$$

$$B_{3,1}(T) = 3T^3 - 6T^2 + 3T$$

$$B_{3,2}(T) = -3T^3 + 3T^2$$

$$B_{3,3}(T) = T^3$$

On obtient donc la courbe cubique définie par les coordonnées paramétriques suivantes (voir figure 10) :

$$\begin{cases} X(u) = -3u^3 + 3u^2 + 6u \\ Y(u) = 2u^3 - 15u^2 + 12u + 1 \end{cases}$$

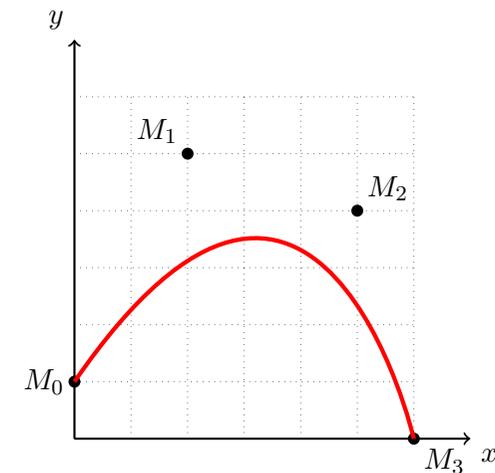


FIGURE 10. Courbe de Bézier cubique

Exercice 33 ♦ Considérons la matrice \mathcal{B} des coefficients de Bernstein qui est définie comme la matrice carrée d'ordre $n + 1$ définie par

$$\mathcal{B}_{i,j} = B_{n,j}^{(i)} \quad 0 \leq i, j \leq n. \quad (44)$$

où $B_{n,j}^{(i)}$ désigne le coefficient de degré i du polynôme de Bernstein $B_{n,j}(T)$.
 Exemple : dans le cas des courbes de Bézier cubiques, la matrice \mathcal{B} est la suivante (voir exemple 5.1) :

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} +1 & +0 & +0 & +0 \\ -3 & +3 & +0 & +0 \\ +3 & -6 & +3 & +0 \\ -1 & +3 & -3 & +1 \end{pmatrix}$$

Montrez que si $x = (x_0, x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_0, y_1, \dots, y_n)$ désignent respectivement le vecteur formé par les abscisses (ordonnées) des points de contrôle M_0, M_1, \dots, M_n dans cet ordre, alors les produits $\mathcal{B}x$ et $\mathcal{B}y$ sont les vecteurs dont les composantes sont les coefficients des polynômes $X(T)$ et $Y(T)$ qui définissent respectivement l'abscisse et l'ordonnée du point générique $M(u) = (X(u), Y(u))$ de la courbe de Bézier.

Ecrivez un algorithme qui calcule la matrice \mathcal{B} en supposant que les coefficients binomiaux sont précalculés dans une table à deux entrées. Calculez la complexité de cet algorithme. Ecrivez un algorithme qui calcule les coordonnées du point $M(u)$ en utilisant la factorisation de Hörner pour l'évaluation des fonctions polynomiales X et Y .

Les courbes de Bézier n'ont pas été définies directement à partir de l'expression (40) mais avec un procédé algorithmique, la formalisation est venue ensuite, c'est ce que nous allons étudier. à partir des $n + 1$ points de contrôle, on peut construire les n barycentres des paires $\{M_i, M_{i+1}\}$, pour $i \in \{0, \dots, n\}$ affectés des coefficients $1 - u$ et u , c'est à dire les n points

$$(1 - u)M_i + uM_{i+1} \quad i \in \{0, \dots, n\}.$$

On peut alors recommencer à calculer deux-à-deux les $n - 1$ barycentres des n points obtenus (toujours avec les mêmes coefficients) et ainsi de suite jusqu'à n'obtenir qu'un seul point. C'est cette méthode qui est représentée dans la figure 11.

A posteriori en formalisant le procédé, on définit la famille de points $M_{i,j}$, $0 \leq i \leq n$ et $0 \leq j \leq n - i$ définis récursivement par les relations suivantes :

$$M_{i,j} = \begin{cases} M_i & \text{si } j = 0, \\ (1 - u)M_{i,j-1} + uM_{i+1,j-1} & \text{si } j \neq 0. \end{cases} \quad (45)$$

La base récurrente est donnée par les points de contrôle M_i , quand $j = 0$. L'indice i désigne l'ordre du point dans la séquence de barycentres, et j désigne la génération de barycentre (la génération 0 correspondant aux

$n + 1$ points de contrôle). On montre alors (exercice 34) que le dernier point obtenu $M_{0,n}$ décrit, en fonction du coefficient de pondération u , la courbe de Bézier associée aux points de contrôle M_p , $0 \leq p \leq n$ (c'est l'objet de l'exercice 34). C'est ainsi qu'apparaissent les coefficients binomiaux des polynômes de Bernstein.

Exemple. Dans le cas d'une courbe de Bézier cubique, on a les points suivants :

$$\begin{aligned} M_{0,0} &= M_0 & M_{0,1} &= (1 - u)M_{0,0} + uM_{1,0} & M_{0,2} &= (1 - u)M_{0,1} + uM_{1,1} \\ M_{1,0} &= M_1 & M_{1,1} &= (1 - u)M_{1,0} + uM_{2,0} & M_{1,2} &= (1 - u)M_{1,1} + uM_{2,1} \\ M_{2,0} &= M_2 & M_{2,1} &= (1 - u)M_{2,0} + uM_{3,0} \\ M_{3,0} &= M_3 \end{aligned}$$

et $M_{0,3} = (1 - u)M_{0,2} + uM_{1,2}$.

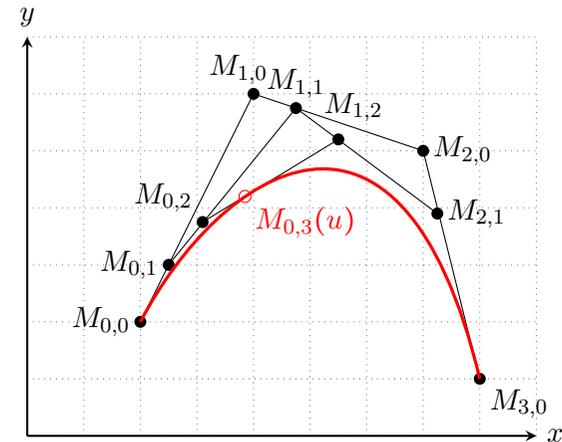


FIGURE 11. Algorithme récursif de calcul d'une courbe de Bézier

Exercice 34 ♠ Démontrez que la courbe $M_{0,n}(u)$, $0 \leq u \leq 1$ est bien la courbe de Bézier associée aux points de contrôle M_p , $0 \leq p \leq n$ où $M_{0,n}(u)$ est défini par la relation de récurrence (45). Pour cela, montrez que l'arbre binaire de racine $M_{0,n}$ dont les nœuds sont les points $M_{i,j}$ avec pour fils gauche le point $M_{i,j-1}$ et pour fils droit le point $M_{i+1,j-1}$ est parfaitement équilibré de hauteur n . Montrez

que l'indexation des 2^n feuilles A_0, \dots, A_{2^n-1} correspond en binaire au parcours effectué pour atteindre ces feuilles en partant de la racine de l'arbre et en codant 0 pour le fils gauche et 1 pour le fils droit.

On rappelle que le poids binaire $\text{wt}(k)$ d'un entier k est égal au nombre de 1 dans sa sa décomposition binaire. Par exemple $\text{wt}(13) = \text{wt}(1101) = 3$. Utilisez le poids binaire des indices pour faire votre calcul.

Exercice 35 ♦ Déduisez de la relation (45) un algorithme récursif pour tracer une courbe de Bézier. Ecrivez le programme correspondant. Montrer que certains calculs sont effectués plusieurs fois et indiquez une méthode itérative qui évite ces calculs superflus (trouvez un ordre de calcul des $M_{i,j}$ qui assure que les deux autres valeurs intervenant dans le calcul ont déjà été calculées). Comparez alors la complexité du tracé des courbes de Bézier entre les trois algorithmes suivants :

- (1) implantation directe à partir de l'expression (40).
- (2) avec la définition récursive (45).
- (3) avec la méthode itérative qui évite les calculs superflus.

Travaux Pratiques 8 ♦ On veut écrire un programme qui trace des courbes de Bézier. Ce programme doit demander à l'utilisateur de saisir le nombre $n + 1$ de points de contrôle de la courbe puis saisir les $n + 1$ couples correspondants. Pour l'affichage, le programme doit demander à l'utilisateur de saisir le nombre de points à tracer et la dimension de la clôture (fenêtre écran). L'utilisateur doit pouvoir modifier tout au long de l'exécution du programme un point de contrôle et voir la modification induite sur la courbe précédente. Pour cela tracer la courbe de référence et la courbe modifiée avec des couleurs différentes. Proposez également à l'utilisateur de choisir l'une des trois méthodes de calcul. Application : tracez la courbe de l'exemple précédent à partir de l'expression (40).

5.2. COURBES DE BÉZIER PAR MORCEAUX

Le défaut des courbes de Bézier comme nous venons de les définir est que le degré des polynômes qui interviennent dans la définition du point $M(u)$ de la courbe est égal à n . D'autre part, toute modification sur un point de contrôle de la courbe affecte l'ensemble de la courbe, il faut donc retracer

la courbe entièrement. Pour ces différentes raisons, on préfère construire des courbes de Bézier *par morceaux*, i.e. on obtient une courbe qui est la jonction de courbes de Bézier définies à partir d'un nombre restreint de points de contrôle. Ainsi, outre les calculs qui sont simplifiés, la modification d'un point de contrôle affectera *localement* la forme de la courbe générale, puisque cette modification ne se fait que sur une des courbes de Bézier. En général, on utilise des courbes de Bézier cubiques (le cas quadratique manque singulièrement de souplesse et pose des problèmes pour la jonction des portions de courbe).

On définit aisément des portions de courbes à l'aide de Bézier cubiques, mais encore faut-il joindre correctement les morceaux ainsi obtenus. Nous allons mettre en évidence les conditions pour faire une « bonne » jonction. Il est clair que la première condition pour deux courbes de Bézier \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 est que le dernier point de contrôle de la courbe \mathcal{C}_1 soit égal au premier point de contrôle de la courbe \mathcal{C}_2 , autrement dit, la courbe doit être continue !

Définition 22. Dans une courbe de Bézier par morceaux, les points de jonction des différentes courbes de Bézier sont appelés des nœuds.

Malheureusement cette première condition de continuité sur la courbe (condition de continuité C^0) est hautement insuffisante, en tout cas pour les besoins traditionnels de l'infographie. Si on se contentait de cette condition, on accepterait des courbes dont l'aspect serait quelque peu chaotique ! Il est légitime d'imposer que les tangentes aux points de jonction soient les mêmes pour les deux courbes. Nous allons étudier ce que cette nouvelle condition impose comme contraintes sur notre courbe.

La tangente en un point $M(a)$ d'une courbe définie paramétriquement par les points $M(u)$, $u \in I$ introduits dans le système (36) est donnée par la droite paramétrée suivante :

$$T(u) = M(a) + uM'(a) = \begin{pmatrix} X(a) + uX'(a) \\ Y(a) + uY'(a) \end{pmatrix} \quad u \in \mathbb{R}. \quad (46)$$

où $X'(a)$ désigne la valeur de la dérivée de la fonction $u \mapsto X(u)$ au point a et $Y'(a)$ la valeur de la dérivée de $u \mapsto Y(u)$ au point a . On a obtenu cette droite, en calculant le vecteur dérivé de M en a et en translatant la droite vectorielle associée par le vecteur $M(a)$.

Considérons à présent deux courbes de Bézier \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 de même degré n (on peut cependant faire les mêmes démonstrations sans cette hypothèse sans pour autant compliquer les calculs). Soit M_0, M_1, \dots, M_n les $n + 1$ points de contrôle de la première courbe et $M_n, M_{n+1}, \dots, M_{2n}$ les $n + 1$ points de contrôle de la seconde courbe. On rappelle que la première condition avait imposé que le dernier point de contrôle de la première courbe soit égal au premier point de contrôle de la seconde. L'équation de la tangente en M_n est obtenue pour $u = 1$ avec la courbe \mathcal{C}_1 et pour $u = 0$ avec la courbe \mathcal{C}_2 . En notant $M_{(1)}(u)$ le point générique de la courbe \mathcal{C}_1 et $M_{(2)}(u)$ celui de \mathcal{C}_2 , on déduit du système (46) la condition de continuité du premier ordre C^1 :

$$M'_{(1)}(1) = M'_{(2)}(0). \quad (47)$$

Il suffit alors de calculer les dérivées des polynômes de Bernstein pour les différentes valeurs de p en 0 et en 1, on a

$$B'_{n,0}(T) = -n(1-T)^{n-1} \quad (48a)$$

$$B'_{n,n}(T) = nT^{n-1} \quad (48b)$$

$$B'_{n,p}(T) = \binom{n}{p} T^{p-1} (1-T)^{n-p-1} (p-nT), \quad 0 < p < n \quad (48c)$$

On en déduit les valeurs

$$\begin{array}{ll} B'_{n,0}(0) = -n & B'_{n,n}(1) = n \\ B'_{n,1}(0) = n & B'_{n,n-1}(1) = -n \\ B'_{n,p}(0) = 0 & B'_{n,p}(1) = 0 \end{array}$$

et on exprime alors la condition (47) sous la forme

$$n(M_n - M_{n-1}) = n(M_{n+1} - M_n),$$

c'est à dire

$$M_n = \frac{1}{2}(M_{n-1} + M_{n+1}). \quad (49)$$

Autrement dit, les trois points M_{n-1} , M_n et M_{n+1} sont alignés et le nœud M_n est situé au milieu des deux autres points. Cependant, est-ce que la condition de continuité du premier ordre suffit? Cela dépend en fait du degré de finesse que l'on veut obtenir. Supposons par exemple que l'on trace la courbe obtenue en joignant un segment de droite avec un arc de cercle (figure 12). Imaginons maintenant un mobile qui se déplace le long de cette droite, que va-t-il se passer quand il va aborder la courbe?

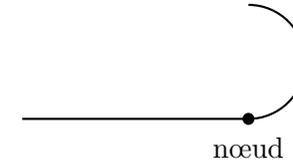


FIGURE 12. Jonction C^1 entre deux courbes

Ce mobile va voir la composante verticale de son accélération passer de 0 à une valeur positive à l'instant précis où il va entamer la courbe, cela sous-entend une variation brutale de l'accélération. La condition de continuité à l'ordre 0 impose une fonction *position* continue (le mobile ne se téléporte pas dans un ravin), la condition de continuité du premier ordre impose une fonction *vitesse* continue du véhicule. Au second ordre elle impose une fonction *accélération* continue. On peut évidemment aller plus loin, tout dépend donc du type de courbe que l'on veut obtenir.

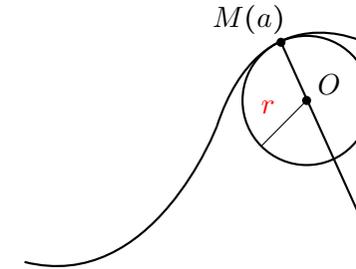


FIGURE 13. Cercle osculateur et rayon de courbure

La continuité du second ordre impose en fait que le *rayon de courbure* de la courbe au nœud soit le même des deux cotés. Très schématiquement, en un point particulier $M(a)$ d'une courbe, si elle est C^2 , il existe un vecteur normal intérieur (qui se dirige dans la concavité de la courbe). Si on place un cercle tangent au point $M(a)$, dont le centre est sur la droite passant par $M(a)$ de vecteur directeur le vecteur normal intérieur, on peut augmenter son rayon tant que localement, autour de $M(a)$, la courbe ne coupe pas la tangente en d'autres points que $M(a)$. En passant à la limite, le rayon finalement obtenu est ce rayon de courbure. Le cercle en question

est appelé *cercle osculateur* de la courbe en $M(a)$ et son rayon est donné par la formule suivante :

$$r(a) = \frac{X'(a)Y''(a) - Y'(a)X''(a)}{(X'(a)^2 + Y'(a)^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (50)$$

La continuité du second ordre impose également des conditions sur les points de contrôle :

Exercice 36 ♠ Démontrer que la continuité du second ordre sur un nœud M_n de deux courbes de Bézier ayant pour points de contrôle respectifs les points M_0, M_1, \dots, M_n et $M_n, M_{n+1}, \dots, M_{2n}$ impose la condition suivante sur les points de contrôle des deux courbes :

$$M_{n-2} - 2M_{n-1} - M_n = M_{n+2} - 2M_{n+1} - M_n \quad (51)$$

En utilisant la condition de continuité du premier ordre (49), montrez que l'on a l'égalité suivante pour le troisième point de contrôle de la seconde courbe :

$$M_{n+2} = M_{n-2} + 4(M_n - M_{n-1}). \quad (52)$$

En conclusion, si on impose une continuité du second ordre pour des courbes de Bézier cubiques, le seul point de contrôle que l'on peut effectivement modifier est le dernier point puisque les trois premiers sont fixés par la condition de continuité. Pour pallier ce handicap, on peut évidemment augmenter le nombre de points de contrôle et par conséquent le degré des polynômes.

Exercice 37 ♦ Calculez le vecteur unitaire normal au point $M(a)$, $a \in [0, 1]$ à une courbe de Bézier d'ordre n . Pour cela, calculez l'équation de la tangente au point $M(a)$.

Travaux Pratiques 9 ♦ Faites la jonction de la courbe de Bézier de l'exemple 5.1 avec la courbe de Bézier cubique définie par le dernier point de contrôle (12, 3) en respectant une continuité du second ordre. Tracez la courbe obtenue.

6. COURBES B -SPLINES

6.1. COURBES B -SPLINES SIMPLES

Le mot *spline* signifie *latte* ou *baguette*. L'origine de la terminologie vient de la méthode employée pour la construction des coques de bateaux. Pour dessiner les courbes de ces coques, on plantait des clous sur des surfaces planes et on y intercalait des lattes flexibles qui se déformaient pour épouser une forme « optimale » au sens où elle minimisait l'énergie. Les propriétés de déformation de ces lattes se traduisent mathématiquement par une classe de continuité élevée .

Le principe pour définir les courbes B -splines est le même que pour les courbes de Bézier, mais les $n + 1$ polynômes de Bernstein sont remplacés par $n + 1$ fonctions polynomiales par morceaux. L'un des objectifs des B -splines est de limiter l'influence d'un point de contrôle à une portion de la courbe pour éviter de refaire un tracé complet en cas de modification de ce point, de la même manière que pour des courbes de Bézier par morceaux. On veut donc pouvoir réaliser une modification *locale* et non *globale* de la courbe.

Contrairement aux courbes de Bézier où le degré des polynômes de Bernstein est directement lié au nombre de points de contrôle puisqu'il vaut n , le degré m des fonctions polynomiales B -splines est fixé par l'utilisateur, on veut simplement que $m \leq n$.

On se donne encore une fois un ensemble de $n + 1$ points de contrôle M_0, M_1, \dots, M_n et m un entier qui désigne le degré commun des *polynômes B -splines*. En plus des $n + 1$ points de contrôle, il faut définir une séquence croissante de $n + m + 2$ valeurs réelles appelée *séquence nodale* ou encore *vecteur nœud* de la courbe :

$$u_0 \leq u_1 \leq \dots \leq u_{n+m+1}. \quad (53)$$



FIGURE 14. Séquence nodale d'une courbe de B -spline (ici $n + m + 1 = 5$)

Notons dès à présent que cette suite est croissante mais pas nécessairement équirépartie. D'autre part, il est possible que certains u_i adjacents soient identiques. Plus précisément, un nœud u_i est dit de *multiplicité* k , s'il existe une sous-liste maximale $(u_j)_{j \in J}$ de longueur k (i.e. $\#J = k$) de $(u_0, u_1, \dots, u_{n+m+1})$ telle que $\forall j \in J, u_j = u_i$. Plus simplement on compte le nombre maximal d'occurrences successives du nœud u_i . On la note $\nu(u_i)$. Le point $M(u)$ qui décrit la courbe B -spline est alors défini par l'équation

$$M(u) = \sum_{p=0}^n N_{p,m}(u)M_p \quad u \in [u_m, u_{n+1}[. \tag{54}$$

Les *fonctions B-splines* $N_{i,j}$, $0 \leq i \leq n$, $0 \leq j \leq m$, sont définies récursivement. La base récurrente est donnée par $N_{i,0}(u) = \mathbf{1}_{[u_i, u_{i+1}[}(u)$, où $\mathbf{1}_{[u_i, u_{i+1}[}$ désigne l'indicatrice de l'intervalle $[u_i, u_{i+1}[$, c'est-à-dire :

$$\mathbf{1}_{[u_i, u_{i+1}[}(u) = \begin{cases} 1, & \text{si } u \in [u_i, u_{i+1}[. \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'auto-définition pour une fonction polynomiale B -spline de *classe* j est donnée par la formule suivante :

$$N_{i,j}(u) = \frac{u - u_i}{u_{i+j} - u_i} N_{i,j-1}(u) + \frac{u_{i+1+j} - u}{u_{i+1+j} - u_{i+1}} N_{i+1,j-1}(u). \tag{55}$$

Cette définition récursive indique au passage pourquoi $m \leq n$, et il faut remarquer que l'indice j désigne de la même manière que pour les fonctions de Bézier, la génération de fonctions. On pose par convention pour ces calculs que $\frac{0}{0} = 0$. De la même façon que dans l'exercice 35.(3), pour éviter de répéter certains calculs, il est préférable de s'assurer pour calculer $N_{i,j}$ que $N_{i-1,j+1}$ et $N_{i,j+1}$ ont déjà été calculés, ce qui est possible grâce au parcours dans le sens de lecture du tableau ci-dessous :

$\mathbf{1}_I$	$[0:1]$	$[1:2]$	$[2:3]$	\dots	$[n:n+1]$	\dots	$[r-1:r]$	$[r:r+1]$
1	$N_{0,1}$	$N_{1,1}$	$N_{2,1}$	\dots	\dots	\dots	$N_{r-1,1}$	
2	$N_{0,2}$	$N_{1,2}$	$N_{2,2}$	\dots	\dots	$N_{r-2,2}$		
\vdots	\vdots							
m	$N_{0,m}$	$N_{1,m}$	$N_{2,m}$	\dots	$N_{n,m}$			

TABLE 1. Table de construction des splines. On pose $r := n + m$

On rappelle que le *support* d'une fonction f définie sur un ensemble E est l'adhérence de la partie S de E sur laquelle la fonction est non-nulle. On le note $\text{supp}(f)$. La démonstration de la proposition suivante est laissée en exercice (voir exercice 38).

Pour ceux qui ont totalement oublié leur cours d'analyse de premier cycle, l'adhérence d'une partie de \mathbb{R} est le plus petit « fermé » qui contient la partie en question. Pour les besoins de ce cours d'infographie, on peut se contenter de noter que l'adhérence d'un intervalle $]a, b[,]a, b]$ ou encore $[a, b[$ est tout simplement l'intervalle $[a, b]$.

Proposition 6. *Le support de la fonction B-spline $N_{i,j}$ vaut*

$$\text{supp}(N_{i,j}) = [u_i, u_{i+j+1}]. \tag{56}$$

D'autre part, $N_{i,j}(u) > 0$ si $u \in]u_i, u_{i+j+1}[$ et $N_{i,j}(u) = 0$ si $u = u_i$ ou $u = u_{i+j+1}$.

Exercice 38 ♦ Démontrez la proposition précédente à l'aide d'un raisonnement par récurrence.

On a donc $\text{supp}(N_{i,j-1}) = [u_i, u_{i+j}]$ et $\text{supp}(N_{i+1,j-1}) = [u_{i+1}, u_{i+j+1}]$. A partir de la formule (55) on observe qu'une fonction B -spline $N_{i,j}$ est la moyenne pondérée des B -splines $N_{i,j-1}$ et $N_{i+1,j-1}$ avec pour coefficients de pondération respectifs, le rapport entre la distance de u à u_i (u_{i+j+1}) et la largeur du support de $N_{i,j-1}$ ($N_{i+1,j-1}$).

Plus important, si l'on veut montrer qu'une courbe B -spline est incluse dans l'enveloppe convexe de ses points de contrôle, il faut que les points de cette courbe soient des barycentres de ses points de contrôle (voir preuve de la proposition 5.1).

Théorème 5. *Les fonctions B-splines satisfont l'égalité suivante pour tout m :*

$$\sum_{p=0}^n N_{p,m}(u) = 1 \quad \forall u \in [u_m, u_{n+1}[. \tag{57}$$

Preuve. Pour $m = 0$, c'est évident puisque les B -splines $B_{p,0}$ sont des indicatrices à supports disjoints. Supposons que ce soit vrai pour $m - 1$, alors

$$\sum_{p=0}^n N_{p,m}(u) = \sum_{p=0}^n \frac{u - u_p}{u_{p+m} - u_p} N_{p,m-1}(u) + \sum_{p=1}^{n+1} \frac{u_{p+m} - u}{u_{p+m} - u_p} N_{p,m-1}(u)$$

où l'on a simplement fait le changement d'indexation $p + 1 \mapsto p$ dans la deuxième somme. Mais $N_{0,m-1}$ vaut 0 pour $u \in [u_m, u_{n+1}]$, en effet $\text{supp}(N_{0,m-1}) = [u_0, u_m[$. De la même façon, sur cet intervalle $N_{n+1,m-1}$ vaut 0. On peut donc rajouter le premier terme à la deuxième somme et le deuxième terme à la première somme et les regrouper pour obtenir :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^n N_{p,m}(u) &= \sum_{p=0}^{n+1} \frac{u_{p+m} - u_p}{u_{p+m} - u_p} N_{p,m-1}(u) \\ &= \sum_{p=0}^{n+1} N_{p,m-1}(u). \end{aligned}$$

Et l'hypothèse de récurrence permet de conclure. □

Corollaire. Une courbe B -spline est contenue dans l'enveloppe convexe de ses points de contrôle.

Preuve. Voir démonstration du corollaire 5.1. □

Exemple. Pour des fonctions B -splines de classe $m = 0, 1, 2$ et 3 , on obtient les courbes de la figure 15. Notons que dans la situation où les nœuds sont équirépartis (*B-splines uniformes*, voir §6.2), la courbe B -spline $N_{p+k,m}$ est obtenue en translatant la courbe $N_{p,m}$, de k la largeur du pas.

Travaux Pratiques 10 ♦ Écrivez un programme qui trace les courbes B -splines de classe m . Essayez de tracer ces courbes avec des nœuds de multiplicité supérieure à 1.

Contrairement aux courbes de Bézier, où la continuité en tout point est de classe C^n , n désignant le degré commun des polynômes de Bernstein, les courbes B -splines ne sont pas des polynômes mais des polynômes par morceaux, il faut donc calculer la continuité aux nœuds de ces courbes

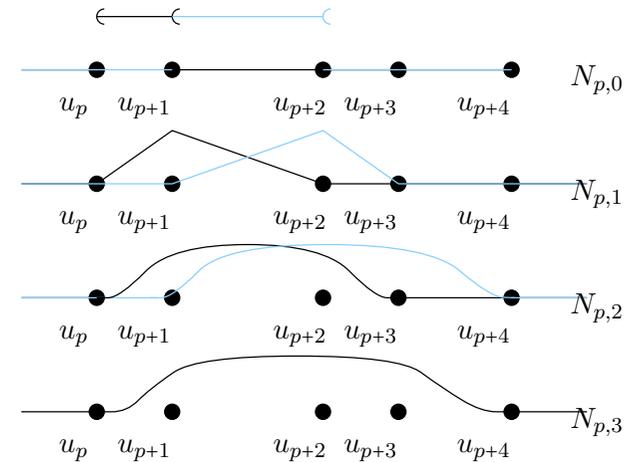


FIGURE 15. Fonctions B -splines pour $m = 0, 1, 2$ et 3

(ailleurs, ce sont des polynômes et le résultat est évident). On admettra le théorème suivant :

Théorème 6. Une courbe B -spline est de classe de continuité $C^{m-\nu(u_i)}$ au nœud u_i , où $\nu(u_i)$ désigne l'ordre de multiplicité de u_i .

Ce résultat est très important, il permet de tracer des courbes avec une continuité arbitraire, on peut ainsi inclure des points de rebroussement ou même avoir une coupure de la courbe si $\nu(u_i) = m$.

D'autre part, en définissant la multiplicité d'un point de contrôle de manière similaire à la multiplicité d'un nœud, on peut rapprocher la courbe d'un point de contrôle particulier en augmentant sa multiplicité et même passer par ce point si sa multiplicité atteint $m - 1$ où m est la classe de la courbe B -spline (voir exercice 39).

Exercice 39 ♠ Montrer qu'une courbe B -spline de classe m contenant un point de contrôle d'ordre $m - 1$ passe par ce point de contrôle.

Exemple. Dans la courbe B -spline ci-dessous, il y a 8 points de contrôle M_1, M_2, \dots, M_7 . Le degré des fonctions splines est fixé à $m = 3$ et on a posé $M_0 = M_1$ et $M_6 = M_7$, la courbe passe donc par ces « deux » points :

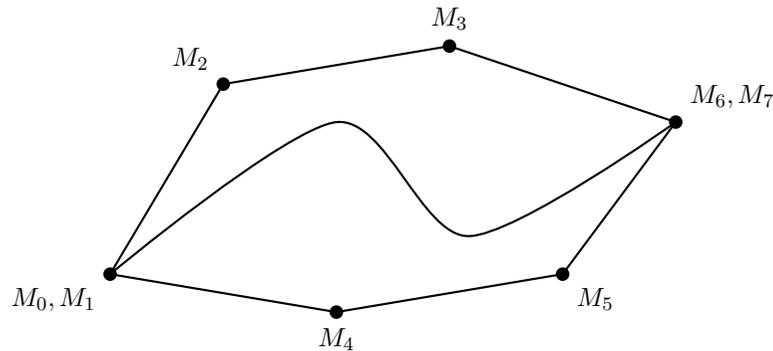


FIGURE 16. Courbe B -spline de degré $m = 3$ (l'enveloppe convexe est tracée).

Exercice 40 ♦ Quelle courbe B -spline obtient-on avec des fonctions B -splines de classe 0 ? De classe 1 ?

Exemple. On peut produire des courbes fermées très facilement en jouant sur la multiplicité des points de contrôle.

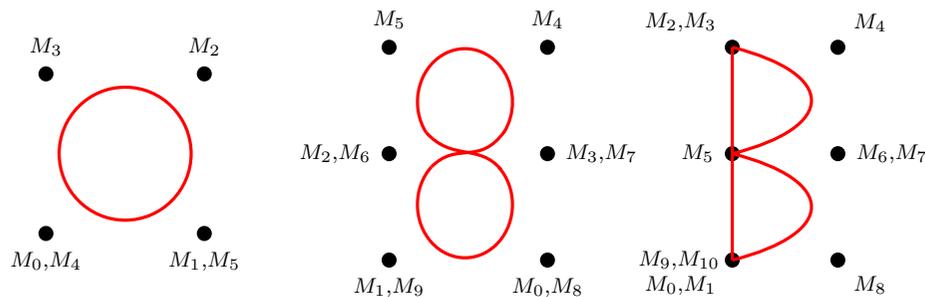


FIGURE 17. Courbes B -splines fermées pour $m = 3$

Exercice 41 ♠ Montrez que les fonctions B -splines $N_{i,k+1}$ de classe $k + 1$ telles que chaque nœud apparaît avec une multiplicité $k + 1$ sont exactement les polynômes de Bernstein $B_{i,k}$.

6.2. COURBES B -SPLINES UNIFORMES

Les courbes B -splines les plus utilisées sont celles pour lesquelles le vecteur nœud est *uniforme*, i.e. $\forall i \in [0, \dots, n + m], u_{i+1} - u_i = K$ ou éventuellement 0 quand on veut diminuer la continuité. Dans ce cas on peut poser $u_i = i$, et on obtient à la place de (55) :

$$N_{i,j}(u) = \frac{1}{j} \left((u - i)N_{i,j-1}(u) + (i + 1 + j - u)N_{i+1,j-1}(u) \right). \quad (58)$$

Pour terminer avec ces courbes B -splines, notons que d'un point de vue technique, on ne peut pas réellement considérer qu'une modification d'un point de contrôle sur une courbe de Bézier soit globale et locale sur une B -spline. En effet, formellement une courbe de Bézier est définie sur un segment et la modification d'un point de contrôle se répercute donc sur tout le segment, c'est exactement la même chose pour une B -spline ! D'ailleurs, faire des jonctions de courbes de Bézier revient à les définir sur plusieurs segments et là on constate bien que les modifications restent locales. Ce qui distingue plus justement les Béziers des B -splines c'est que pour conserver une certaine classe de continuité, les courbes de Bézier imposent la position des points de contrôle, alors que dans le cas des B -splines, les points de contrôle ne sont pas modifiés par la continuité en chaque nœud. D'autre part, le degré des polynômes B -splines est fixé au départ et n'est lié au nombre de points de contrôle que par l'inégalité $m \leq n$.

7. SURFACES DE BÉZIER

Le principe est le même pour les surfaces que pour les courbes, mais les points de contrôle sont définis sur une grille rectangulaire qui a subi une déformation élastique dans l'espace.

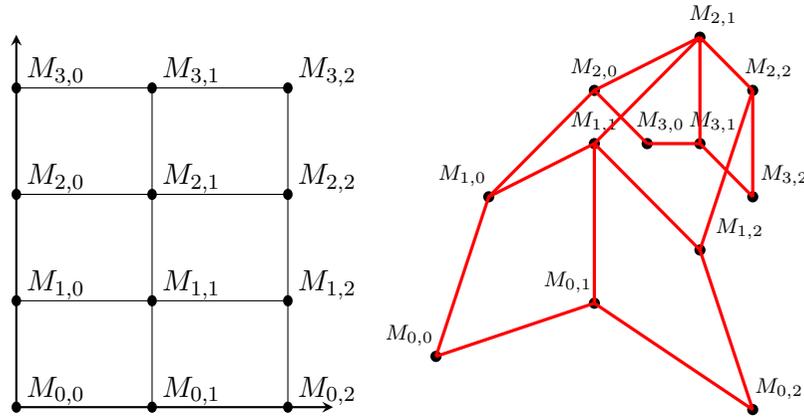


FIGURE 18. Grille planaire et points de contrôle associés

La représentation paramétrique de la surface nécessite évidemment un deuxième degré de liberté et dépend donc de deux paramètres u et v :

$$M(u, v) = \begin{pmatrix} X(u, v) \\ Y(u, v) \\ Z(u, v) \end{pmatrix} \quad (59)$$

Définition 23. On appelle **surface de Bézier** de degré nm , associée aux **points de contrôle** $M_{p,q}$, $0 \leq p \leq n$, $0 \leq q \leq m$, la surface paramétrique définie par les points suivants :

$$M(u, v) = \sum_{p=0}^n \sum_{q=0}^m B_{n,p}(u) B_{m,q}(v) M_{p,q} \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]. \quad (60)$$

De la même façon que pour les courbes, les surfaces de Bézier habituellement employées sont des surfaces dites *bicubiques*, i.e. $n = m = 3$, et on emploie les mêmes techniques pour construire des surfaces complexes à partir de surfaces élémentaires bicubiques. La jonction entre deux surfaces de Bézier se fait sur un des « bords » des deux surfaces, autrement dit, il n'y a plus 1 point de contrôle en commun, mais n ou m points en fonction du bord où l'on fait la jonction. Les conditions de continuité du premier et du second ordre s'obtiennent de la même façon que pour les courbes, les calculs sont simplement plus fastidieux.

Nous donnons seulement l'équation paramétrique du plan tangent au point $M(a, b)$. On obtient deux vecteurs tangents à la surface $(u, v) \mapsto M(u, v)$ en (a, b) en dérivant $M(u, v)$ suivant les directions u et v , le plan vectoriel est donc engendré par ces deux vecteurs. On obtient finalement le plan affine $(u, v) \mapsto T(u, v)$ en tradant le plan vectoriel par le vecteur $M(a, b)$, d'où :

$$\forall (u, v) \in \mathcal{P}^2 \quad T(u, v) = \begin{pmatrix} X(a, b) + uX'_u(a, b) + vX'_v(a, b) \\ Y(a, b) + uY'_u(a, b) + vY'_v(a, b) \\ Z(a, b) + uZ'_u(a, b) + vZ'_v(a, b) \end{pmatrix} \quad (61)$$

Exercice 42 ♦ Exprimer les conditions de continuité du premier et du second ordre entre deux surfaces de Bézier bicubiques (pensez à utiliser les résultats obtenus sur les courbes).

Remarque. Notons que le bord d'une surface de Bézier est une courbe de Bézier, les conditions (49) et (52) sur les points de jonctions sur ce bord sont donc strictement identiques à la situation plane. En effet l'ajout d'une troisième coordonnée à un point de contrôle ne fait que définir une courbe dans l'espace plutôt qu'une courbe plane.

ANNEXE A - LE CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

On trouvera ici le *cercle trigonométrique* et un petit formulaire de rappels. Le point $M = e^{i\theta}$ décrit le cercle unité grâce à l'angle θ que forme le vecteur \overrightarrow{OM} avec l'axe des abscisses. Ses coordonnées sont précisément $(\cos(\theta), \sin(\theta))$ dans la base canonique.

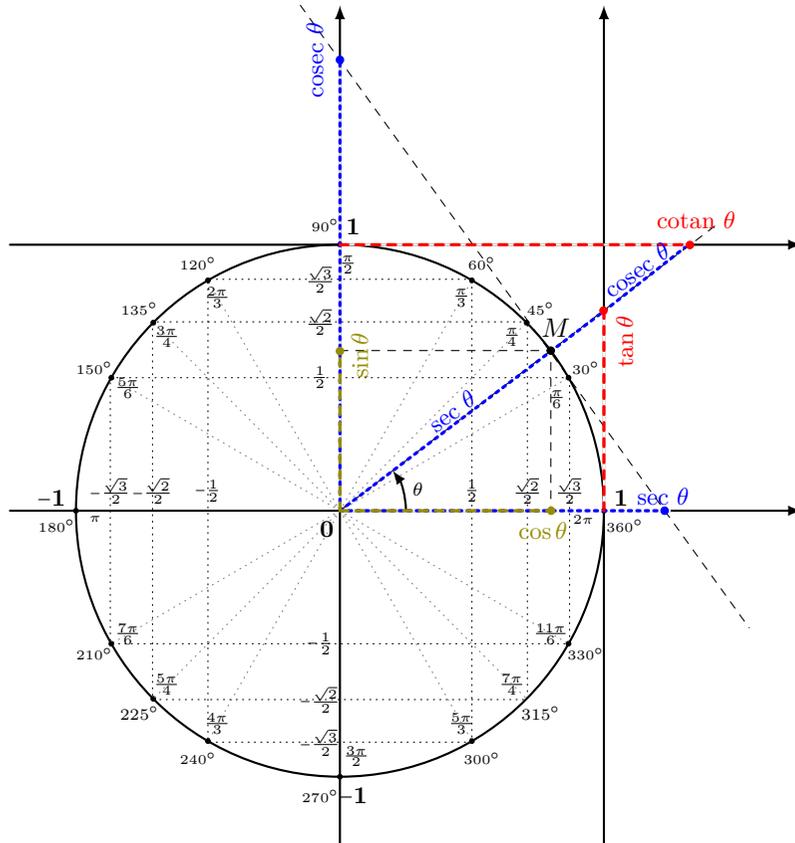


FIGURE 19. Le cercle trigonométrique

7.1. PYTHAGORE

Pour tout angle $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

7.2. TANGENTE, COTANGENTE, SECANTE, COSECANTE

Pour tout angle $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{\sin \theta}{\cos \theta} & \cotan \theta &= \frac{1}{\tan \theta} = \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ \sec \theta &= \frac{1}{\cos \theta} & \operatorname{cosec} \theta &= \frac{1}{\sin \theta} \end{aligned}$$

7.3. PÉRIODICITÉ

Les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques, c'est-à-dire que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\cos(\theta + 2k\pi) = \cos \theta \quad \text{et} \quad \sin(\theta + 2k\pi) = \sin \theta.$$

7.4. SYMÉTRIES

Pour tout angle $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos(-\theta) &= \cos \theta & \sin(-\theta) &= -\sin \theta \\ \cos(\pi - \theta) &= -\cos \theta & \sin(\pi - \theta) &= \sin \theta \\ \cos(\pi + \theta) &= -\cos \theta & \sin(\pi + \theta) &= -\sin \theta \\ \cos(\pi/2 - \theta) &= \sin \theta & \sin(\pi/2 - \theta) &= \cos \theta \\ \cos(\pi/2 + \theta) &= -\sin \theta & \sin(\pi/2 + \theta) &= \cos \theta \end{aligned}$$

7.5. ADDITION ET DIFFÉRENCE

Pour tous angles $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sin(a + b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b & \cos(a + b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \sin(a - b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b & \cos(a - b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \end{aligned}$$

7.6. ANGLE DOUBLE, CARRÉ ET MOITIÉ

Pour tous angles $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sin(2a) &= 2 \sin a \cos a & \cos(2a) &= \cos^2 a - \sin^2 a \\ \sin^2 a &= \frac{1 - \cos(2a)}{2} & \cos^2 a &= \frac{1 + \cos(2a)}{2} \\ \left| \sin\left(\frac{a}{2}\right) \right| &= \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} & \left| \cos\left(\frac{a}{2}\right) \right| &= \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}} \end{aligned}$$

7.7. TRANSFORMATION DE PRODUITS EN SOMMES

Pour tous angles $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \cos a \cos b &= \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b)) \\ \sin a \cos b &= \frac{1}{2} (\sin(a + b) + \sin(a - b)) \\ \sin a \sin b &= \frac{1}{2} (\cos(a - b) - \cos(a + b)) \end{aligned}$$

7.8. TRANSFORMATION DE SOMMES EN PRODUITS

Pour tous angles $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \sin a + \sin b &= 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \sin a - \sin b &= 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos a + \cos b &= 2 \cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right) \\ \cos a - \cos b &= -2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \end{aligned}$$

7.9. DÉRIVATION

Pour tout angle $x \in \mathbb{R}$:

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (\sin x)' = \cos x \quad (\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

8. ANNEXE B - TRIANGLES

8.1. RAPPELS DU COLLÈGE SUR LES POLYGOUES

Les *polygones*¹⁰ sont des figures géométriques *planes*, c'est-à-dire que l'on peut dessiner sur une surface comme un mur ou une feuille de papier par exemple. Elles sont constituées d'une succession de segments (les *côtés*) dont les extrémités (les *sommets*) sont mises bout-à-bout et dont la dernière est connectée à la première. La figure 20 ci-dessous montre quatre polygones avec des propriétés différentes.

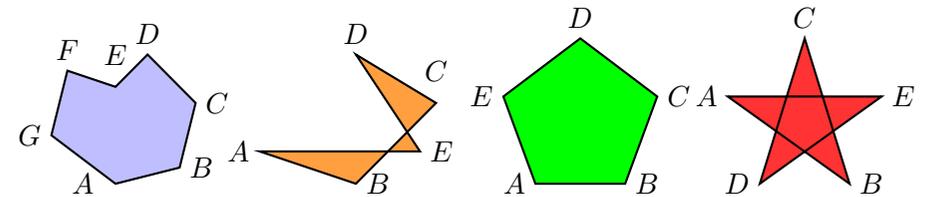


FIGURE 20. De gauche à droite : polygone *irrégulier simple* à 7 côtés, polygone *irrégulier croisé* à 5 côtés, polygone *régulier simple* à 5 côtés, polygone *régulier croisé* à 5 côtés

Quand les côtés ont la même longueur, on dit que le polygone est *régulier*, sinon il est *irrégulier*. Quand les côtés d'un polygone se croisent, on dit que le polygone est *croisé*, sinon on dit qu'il est *simple*. Dans la figure 20, les polygones sont constitués par les segments successifs formés par des couples de points dont les noms suivent l'ordre alphabétique $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, etc.

Certains polygones sont baptisés en fonction du nombre de leurs côtés. Un polygone à 3 côté est appelé *trigone* ou *triangle*. On parle de *tetragone* ou de *quadrilatère* pour 4 côtés, de *pentagone* pour 5 côtés (comme le bâtiment de la défense américain), d'*hexagone* pour 6 côtés (comme la carte de France continentale), etc.

La surface délimitée par les côtés d'un polygone est souvent appelée polygone elle aussi. On a vu également en sixième qu'un *angle* est l'écartement

10. du grec *polus* (nombreux) et *gônia* (angle).

entre deux demi-droites de même origine et que les angles se mesurent souvent en *degrés*.

Propriété 1. La somme des mesures des angles intérieurs d'un polygone simple ne dépend que du nombre n de ses cotés et vaut $(n - 2) \times 180^\circ$.

Si l'on applique la propriété 1 aux angles du pentagone vert dans la figure 20 pour lequel $n = 5$, on obtient $(5 - 2) \times 180 = 540^\circ$. Attention, la propriété est fautive si le polygone est croisé (polygones orange et rouge dans la figure).

8.2. COMPLÉMENT SUR LES POLYGONES

Un polygone est *convexe* si tous les points du segment $[XY]$ formé par deux points quelconques X et Y choisis dans le polygone appartiennent au polygone. Dans la figure 20, un seul polygone est convexe, c'est le polygone vert. Le polygone orange ne l'est pas. En effet, seuls les points A et D du segment $[AD]$ sont inclus dans le polygone orange (voir figure 21). Le principe est le même pour démontrer que les polygones bleu et rouge ne sont pas convexes.

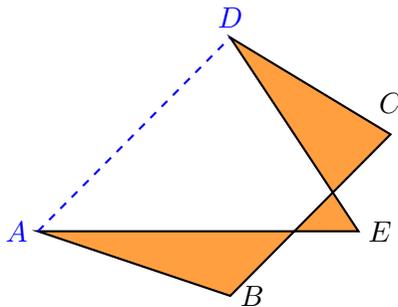


FIGURE 21. Preuve de non-convexité d'un polygone.

8.3. TRIANGLES, DÉFINITION ET VOCABULAIRE

Définition 24. Un *triangle* est un polygone à trois côtés.

Il faut remarquer que le mot triangle met l'accent sur les trois *angles* que forment les côtés de cette figure tandis que le mot trigone met l'accent sur le nombre de côtés (les deux sont synonymes ici). Si A , B et C sont trois points du plan qui ne sont pas alignés, on désigne par ABC le triangle formé par ces trois sommets. Dans un triangle, un sommet et le côté formé par les deux autres sommets sont dit *opposés*. Par exemple, le sommet C est opposé au côté $[AB]$ dans chacun des triangles de la figure 29. Les sommets d'un triangle sont généralement désignés par des lettres majuscules et dans ce cas la longueur du côté opposé à un sommet X est désignée par la même lettre x mais en minuscule (voir figure 24).

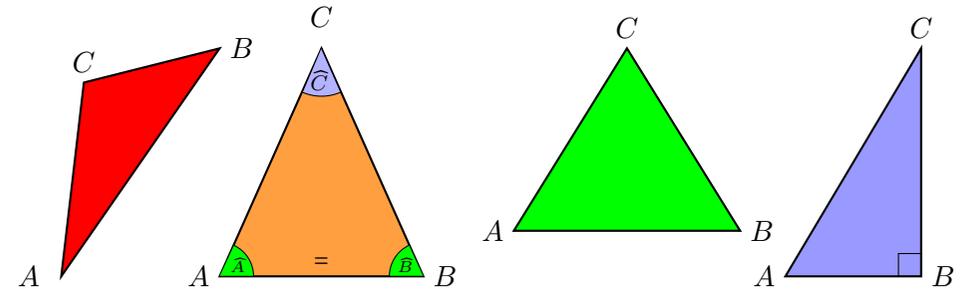


FIGURE 22. De gauche à droite : triangle *quelconque*, triangle *isocèle*, triangle *équilatéral* et triangle *rectangle* en B .

La notation \widehat{ACB} pour désigner un angle dans une figure géométrique utilise les trois points A , C et B et fixe le sens de la rotation dans celui de la lecture, l'angle \widehat{ACB} relie donc les segments $[AC]$ et $[CB]$, la pointe au-dessus de C signifiant que c'est autour de ce point que se fait la rotation. Dans le cas où la figure est un unique triangle, on se contente d'écrire \widehat{C} car il n'y a pas d'autres angles possibles s'articulant autour d'un sommet (voir le triangle orange dans la figure 29 par exemple).

Définition 25. Un triangle avec deux côtés de même longueur est dit *isocèle*.

Le triangle orange est isocèle car $\widehat{A} = \widehat{B}$.

Définition 26. Un triangle régulier est dit *équilatéral*.

Le triangle vert est équilatéral et on a $AB = AC = BC$ et $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C}$.

Définition 27. Un triangle dont deux côtés forment un angle de 90° est dit **rectangle** en le point commun à ces deux côtés.

Le triangle bleu est rectangle en B car $\widehat{B} = 90^\circ$.

8.4. L'INÉGALITÉ TRIANGULAIRE

Quand nous nous déplaçons physiquement d'un point A à un point B , il nous semble évident que le chemin le plus court est une ligne droite. Autrement dit, si on emprunte n'importe quel autre chemin que le segment $[AB]$ pour relier A à B alors ce chemin est plus long que AB . Dans le cas particulier où cet autre chemin consiste à suivre les côtés AM et MB d'un triangle AMB , cette propriété s'appelle l'*inégalité triangulaire*.

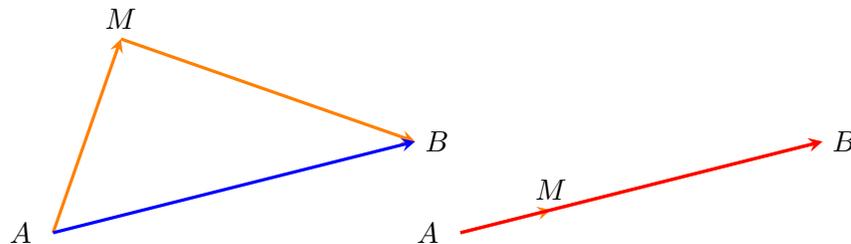


FIGURE 23. Inégalité triangulaire et cas d'égalité

Propriété 2 (Inégalité triangulaire). Soit A , B et M trois points du plan, alors

$$AB \leq AM + MB \quad (62)$$

Propriété 3 (Cas d'égalité). Soit A , B et M trois points du plan. Si le point M appartient au segment $[AB]$, alors

$$AB = AM + MB \quad (63)$$

La propriété réciproque est également vraie :

Réciproque (Cas d'égalité). Si trois points A , B et M vérifient l'égalité (63), alors le point M appartient au segment $[AB]$.

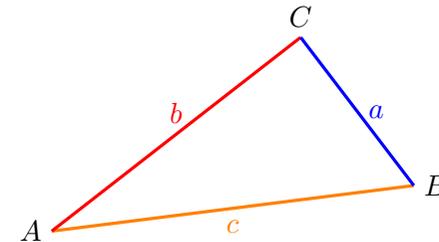


FIGURE 24. Triangle ABC

On en déduit que si les trois points ne sont pas alignés, l'inégalité est *stricte*. Ainsi, si l'on applique l'inégalité triangulaire (62) à chacun des trois côtés d'un triangle ABC , on obtient (voir la figure 24 pour les notations) :

$$a < b + c \quad (64)$$

$$b < a + c \quad (65)$$

$$c < a + b \quad (66)$$

On peut toujours classer les longueurs d'un triangle a , b et c dans l'ordre croissant, quitte à permuter les noms des sommets :

$$a \leq b \leq c$$

Dans ce cas, les deux inégalités (64) et (65) sont toujours satisfaites puisque $a \leq b$ et $c > 0$ d'une part et $b \leq c$ et $a > 0$ d'autre part. Il ne reste donc que l'inégalité (66) qui peut être satisfaite ou non, ce qui aboutit à la propriété :

Propriété 4 (Constructibilité d'un triangle). Un triangle est constructible si et seulement si la longueur du plus grand côté est inférieure à la somme des longueurs des deux autres.

8.5. SOMME DES ANGLES D'UN TRIANGLE

Si l'on applique la propriété 1 à un triangle, auquel cas $n = 3$, on obtient le corollaire suivant :

Corollaire (Somme des angles d'un triangle). La somme des mesures des angles intérieurs d'un triangle est égale à 180° .

En notant \widehat{A} , \widehat{B} et \widehat{C} les angles formés par les côtés d'un triangle ABC aux points A , B et C respectivement, cette propriété fournit l'égalité :

$$\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ.$$

Dans le cas d'un triangle équilatéral, les trois angles étant identiques, appelons le α , on obtient

$$\alpha + \alpha + \alpha = 180$$

Alors $3\alpha = 180$ et donc $\alpha = 60^\circ$. Dans le cas d'un triangle rectangle, comme l'un des trois angles est égal à 90° , il reste $180 - 90 = 90^\circ$ pour constituer la somme des deux autres angles qui sont donc *aigus* puisqu'il sont nécessairement inférieurs à 90° (si un angle est strictement supérieur à 90° , il est *obtus*).

Notons que dans un triangle l'angle extérieur a un angle donné de mesure α a pour mesure $(360 - \alpha)^\circ$.

8.6. DROITES REMARQUABLES DANS UN TRIANGLE

Il y a 12 droites remarquables dans un triangle. Elles sont regroupées en 4 groupes distincts :

- (1) Ses 3 *médianes*. La *médiane* à un côté est la droite qui passe par le milieu de ce côté et le sommet opposé.
- (2) Ses 3 *médiatrices*. La *médiatrice* d'un côté est la droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est perpendiculaire à ce côté.
- (3) Ses 3 *hauteurs*. La *hauteur* d'un sommet est la droite qui passe par le sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé.
- (4) Ses 3 *bissectrices*. La *bissectrice* d'un angle est la droite qui passe par le sommet de cet angle et qui le coupe en deux.

La hauteur d'un sommet coupe la droite qui s'appuie sur le côté opposé (la *base*) en un point appelé *ped* (c'est le point H dans le triangle vert de base $[AB]$ de la figure 25 pour la hauteur du point C). La hauteur d'un sommet désigne aussi le segment $[CH]$ et sa longueur CH . Le pied n'est pas nécessairement situé sur la base, il est par exemple en dehors du

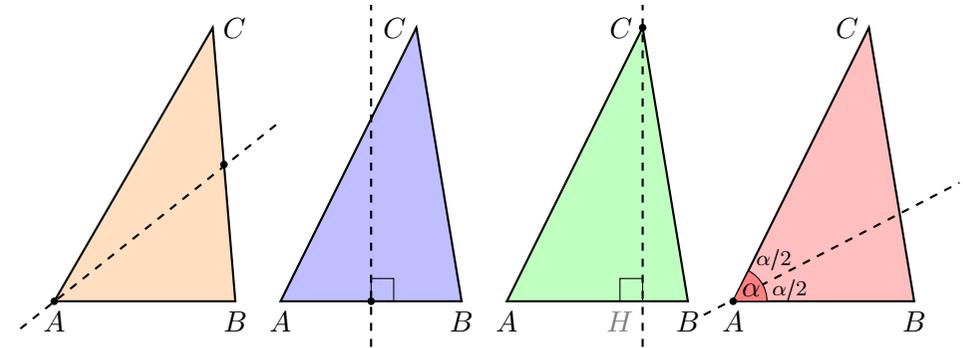


FIGURE 25. De gauche à droite : la *médiane* de $[BC]$, la *médiatrice* de $[AB]$, la *hauteur* de C , la *bissectrice* de \widehat{A} .

segment $[CB]$ pour la hauteur du sommet A dans le triangle de la figure 26.

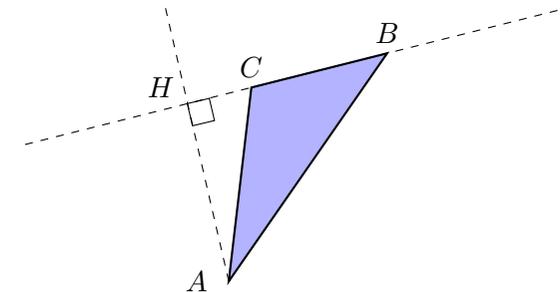


FIGURE 26. Pied H de la hauteur en A

Propriété 5 (Équidistance). Si un point M du plan appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ alors il est équidistant aux points A et B .

Réciproque (Équidistance). Si un point M du plan est équidistant à deux points A et B alors il appartient à la médiatrice du segment $[AB]$.

Définition 28. On dit que des droites sont *concurrentes* si elles se coupent toutes en un même point.

Évidemment, deux droites qui ne sont pas parallèles sont toujours concourantes puisqu'elles se coupent en un seul point. C'est à partir de trois droites que la concourance devient une propriété remarquable car trois droites quelconques n'ont aucune raison de se rencontrer au même point.

Propriété 6. On considère un triangle quelconque. Alors :

- (1) Ses trois **médianes** sont concourantes et leur point d'intersection est appelé **centre de gravité** du triangle.
- (2) Ses trois **médiatrices** sont concourantes et leur point d'intersection est le centre du **cercle circonscrit** au triangle.
- (3) Ses trois **hauteurs** sont concourantes et leur point d'intersection est appelé **orthocentre** du triangle.
- (4) Ses trois **bissectrices** sont concourantes et leur point d'intersection est le centre du **cercle inscrit** dans le triangle.

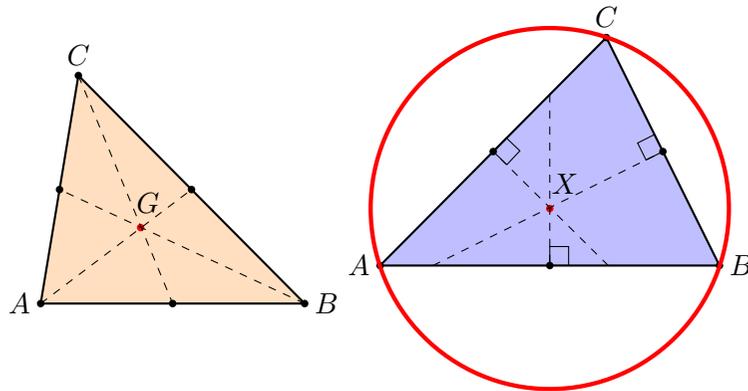


FIGURE 27. À gauche : médianes et centre de gravité G . À droite : médiatrices et **cercle circonscrit** de centre X .

8.7. LE THÉORÈME DE PYTHAGORE ET SA RÉCIPROQUE

Soit ABC un triangle rectangle en A (voir le triangle bleu dans la figure 29).

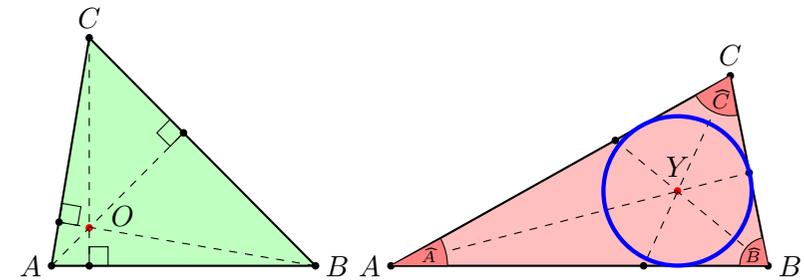


FIGURE 28. À gauche : hauteurs et orthocentre O . À droite : bissectrices et **cercle inscrit** de centre Y .

Définition 29. Dans un triangle ABC rectangle en A , le côté opposé à A , c'est-à-dire le côté $[BC]$, est appelé **l'hypothénuse**.

Le mathématicien grec Pythagore (né 580 ans avant JC.) a prouvé le très important théorème qui porte aujourd'hui son nom :

Théorème 7 (Pythagore). Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypothénuse est égal à la somme des carrés des deux autres côtés.

Dans l'exemple de notre triangle rectangle en A , on a donc :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2. \quad (67)$$

On peut également démontrer la réciproque de ce théorème :

Réciproque (Pythagore). Dans un triangle quelconque, si le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ces deux autres côtés forment un angle droit.

Cette propriété est bien connue des maçons qui peuvent facilement tracer un angle droit avec une simple cordelette, un bâton et trois piquets. Il faut couper trois bouts de cordelette, la première mesure 3 bâtons, la deuxième 4 bâtons et la troisième 5 bâtons.

- (1) On tend la corde de mesure 5 entre deux piquets B et C que l'on plante dans le sol.

- (2) On fixe une extrémité de la ficelle de mesure 3 au piquet B et on trace un cercle en fixant le troisième piquet au bout de cette cordelette tendue.
- (3) On fixe une extrémité de la ficelle de mesure 4 au piquet C et on trace un cercle en fixant le troisième piquet au bout de cette cordelette tendue.

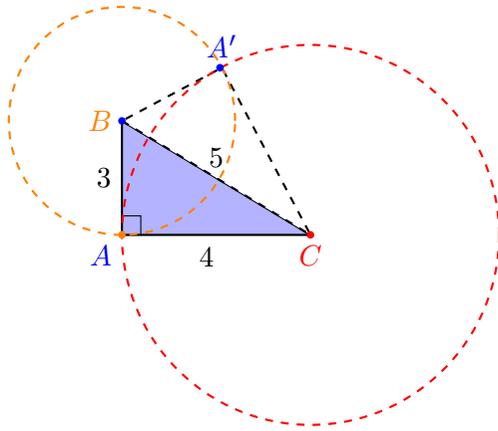


FIGURE 29. Triangle ABC rectangle en A et application du théorème de Pythagore par les maçons.

Les deux cercles se coupent en deux points A et A' formant un triangle ABC rectangle en A et un triangle $A'BC$ rectangle en A' puisque d'après la réciproque du théorème de Pythagore :

$$\underbrace{3^2}_9 + \underbrace{4^2}_{16} = \underbrace{5^2}_{25}$$

Grâce à l'égalité (67), si l'on connaît la longueur de deux côtés d'un triangle rectangle, on peut en déduire la longueur du troisième. Par exemple si dans un triangle ABC rectangle en A , on connaît les longueurs des côtés $[BC]$ et $[AC]$, on obtient AB^2 en calculant $BC^2 - AC^2$:

$$AB^2 = BC^2 - AC^2. \quad (68)$$

Mais on veut la longueur AB du côté $[AB]$ et pas le carré AB^2 de cette longueur.

Définition 30. On appelle **racine carrée** d'un nombre positif x , l'unique nombre positif r tel que $r^2 = x$. On le note \sqrt{x} .

Exemple : si $BC = 10$ et $AC = 8$, alors d'après (68), on a

$$\begin{aligned} AB^2 &= 10^2 - 8^2 \\ &= 100 - 64 \\ &= 36 \end{aligned}$$

On a $AB^2 = 36$ mais $\sqrt{36} = 6$ car $6^2 = 36$, donc $AB = 6$.

INDEX

- abscisse, 13
- addition, 2
 - complexe, 11
- algorithme
 - Bresenham, 18
 - Gauss-Jordan, 7
 - incrémental, 19
 - Michener, 20
- angle, 12
 - aigu, 37
 - bissectrice, 37
 - degrés, 35
 - mesure, 12
 - obtus, 37
- application
 - linéaire, 5
 - rang, 5
- barycentre, 15
 - coefficients de pondération, 15
 - poids, 15
- base, 3
 - canonique, 4
- cercle
 - osculateur, 28
 - trigonométrique, 33
- combinaison linéaire, 3
- complété projectif, 16
- conjugué, 11
- continuité
 - du second ordre, 28
- coordonnées, 3
 - homogènes, 15
- corps
 - \mathbb{C} des complexes, 11
- corps des scalaires, 3
- courbe
 - B*-spline
 - classe, 29
 - uniforme, 30
 - de Bézier, 22
 - cubique, 25
 - nœuds, 26
 - par morceaux, 26
 - quadratique, 26
- enveloppe convexe, 21
- orientation, 22
- points d'une, 22
- rayon de courbure, 27
- côtés
 - opposés, 35
- dimension, 3
- distance, 9
 - euclidienne, 9
- domaine
 - d'opérateurs, 2
- droite
 - engendrée, 10
 - orthogonale, 13
 - parallèle, 13
 - perpendiculaire, 13
 - projective, 16
 - vectorielle, 10
 - à l'infini, 16
- droites
 - concourantes, 37
- dépendance
 - linéaire, 3
- ensemble
 - convexe, 22
- entier, 19
- enveloppe convexe, 23
- espace
 - affine, 13
 - naturel, 13
 - normalisé, 17
 - projectif, 15
 - vectériel
 - canonique, 4
 - dimension, 3
 - image, 5

- noyau, 5
- sur un corps K , 2
- famille
 - génératrice, 3
 - libre, 3
 - liée, 3
- fenêtre
 - d'observation, 17
 - écran, 18
- figure
 - géométrique
 - plane, 34
- fonction
 - cosinus, 12
 - exponentielle, 11
 - complexe, 11
 - sinus, 12
 - support d'une, 29
- forme
 - r -linéaire, 9
 - bilinéaire
 - symétrique non-dégénérée, 9
- groupe
 - linéaire, 8
 - orthogonal, 10
 - spécial orthogonal, 10
 - unitaire, 11
- hauteur
 - pied, 37
- hexagone, 34
- homogénéisation, 16
- homothétie, 8
 - de rapport λ , 8
- hyperplan, 10
 - à l'infini, 16
- indépendance
 - linéaire, 3
- inégalité triangulaire, 36
- matrice
 - de rotation, 10
- orthogonale, 10
- produit, 5
- représentative, 5
- somme, 5
- transposée, 5
- mobile
 - accélération, 27
 - position, 27
 - vitesse, 27
- morphisme, 5
- multiplication
 - complexe, 11
- multiplicité, 29
- nœud
 - uniforme, 31
- nombre
 - π , 12
 - complexe, 11
 - conjugué, 11
 - module, 11
 - de Neper, 11
- normalisation, 17
- norme, 9
 - euclidienne, 9
- noyau, 5
- ordonnée, 13
- partie
 - imaginaire, 11
 - réelle, 11
- pentagone, 34
- pivot
 - de Gauss, 7
- plan
 - affine, 13
 - projectif, 15
 - réel, 4
 - vectorel
 - réel, 4
- point, 13
 - de contrôle, 22, 32
- polygone

- angle, 34
- convexe, 35
- croisé, 34
- côté, 34
- irrégulier, 34
- régulier, 34
- simple, 34
- sommet, 34
- polygône, 34
- polynôme
 - B*-spline, 29
 - de Bernstein, 22
- produit
 - externe, 2
 - scalaire, 9
- projection
 - orthogonale, 14
- projeté
 - orthogonal, 14
- quadrilatère, 34
- racine carrée, 39
- rayon de courbure, 27
- représentation
 - implicite, 21
 - paramétrique, 10
- rotation
 - affine, 14
 - autour d'un point, 14
 - d'angle θ , 12
 - vectorielle, 12
- segment, 13
 - milieu, 14
 - médiane, 37
 - médiatrice, 37
- sommet
 - hauteur, 37
- sous-espace vectoriel, 3
 - engendré, 3
- spline, 28
- support
 - d'une fonction, 29
- surface
 - de Bézier, 32
 - bicubique, 32
- symétrie, 14
 - orthogonale, 14
- séquence nodale, 28
- tétragone, 34
- translation, 8
 - de vecteur v , 8
- triangle, 34, 35
 - base, 37
 - centre de gravité, 38
 - cercle circonscrit, 38
 - cercle inscrit, 38
 - hypothénuse, 38
 - isocèle, 35
 - orthocentre, 38
 - rectangle, 36
 - équilatéral, 35
- trigone, 34
- vecteur, 3
 - colonne, 5
 - directeur, 10
 - ligne, 5
 - nœud, 28
 - normé, 10
 - orthogonal, 10
 - orthonormé, 10
 - unitaire, 10
- équation, 10