MASTER D'INFORMATIQUE — INFOGRAPHIE

Première session. mercredi 6 janvier 1999

La précision et la clarté de votre rédaction sont *fondamentales*. Pas de délire pseudo-mathématique SVP. Tous les documents sont autorisés. Durée 1 heure. Bonne année !

Question 1. On considère un triangle équilatéral (A, B, C) de coté λ. On fixe les coordonnées des points A et B à $(0, 0)$ et $(\lambda, 0)$ respectivement. Calculez les coordonnées du point C situé dans le demi-plan positif.

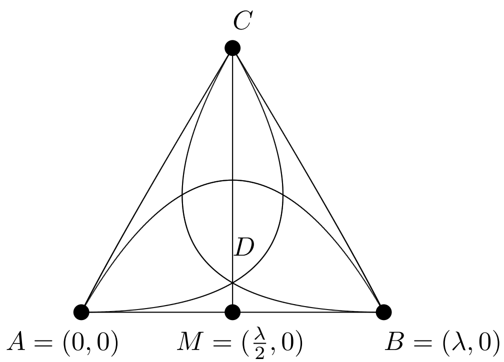

FIGURE 1. Courbes $\mathcal{C}_{AB}$, $\mathcal{C}_{AC}$ et $\mathcal{C}_{BC}$.

Réponse : On note M le milieu de AB. D'après Pythagore, on peut écrire $MA^2 + MC^2 = AC^2$, or $MA = \lambda/2$ et $AC = \lambda$, d'où

$$MC^2 = \lambda^2 - \frac{\lambda^2}{4} = \frac{3}{4}\lambda^2.$$

Finalement $MC = \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda$ et $C = (\frac{\lambda}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\lambda)$.

Question 2. On considère les 3 courbes de Bézier quadratiques

$$\mathcal{C}_{AB} = \{M_{AB}(u),\ u \in [0,1]\}.$$
$$\mathcal{C}_{AC} = \{M_{AC}(u),\ u \in [0,1]\}.$$
$$\mathcal{C}_{BC} = \{M_{BC}(u),\ u \in [0,1]\}.$$

dont les points de contrôle respectifs sont A, C, B ; A, B, C ; B, A, C. Calculez les coordonnées des points génériques de ces trois courbes. Pouvait-on obtenir ces trois courbes plus simplement que par ce calcul ?

Réponse : Pour une courbe de Bézier quadratique, on a

$$M(u) = \sum_{p=0}^{2} B_{2,p}(u)M_p, \quad \text{où} \quad B_{2,p}(T) = \binom{p}{2}(1-T)^{2-p}T^p,$$

soit

$$M(u) = (1-u)^2 M_0 + 2(1-u)uM_1 + u^2 M_2.$$

En remplaçant les trois points de contrôle par les points respectifs, on obtient :
(1)

$$M_{AB} = \frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix} 2u \\ 2u(1-u)\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad M_{AC} = \frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix} u(4-3u) \\ u^2\sqrt{3} \end{pmatrix}, \quad M_{BC} = \frac{\lambda}{2}\begin{pmatrix} 3u^2 - 4u + 2 \\ u^2\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

On pouvait obtenir les deux dernières courbes en faisant subir une rotation de $2\pi/3$ et $4\pi/3$ à la première courbe.

Question 3. Montrez que les courbes $\mathcal{C}_{AC}$ et $\mathcal{C}_{BC}$ sont symétriques par rapport à la médiatrice (CM) où M désigne le milieu du segment AB et déduisez que les points d'intersection de ces deux courbes ont pour abscisse $\lambda/2$. Calculez alors ces points d'intersection à partir des résultats de la question précédente.

Réponse : Le point B est le symétrique de A par rapport à la médiatrice (CM) puisque M est le milieu de (AB). Le triangle étant équilatéral, il est en particulier isocèle, les triangles (A, M, C) et (B, M, C) sont donc symétriques par rapport à la médiatrice (CM). Le barycentre d'un système de points étant caractérisé par sa distance à ces points, le symétrique de ce barycentre est le barycentre des symétriques des points, il en va donc de même pour la courbe de Bézier.

Les points fixes d'une symétrie étant situés sur l'axe de symétrie, l'abscisse des points d'intersection des deux courbes sont sur la médiatrice (MC), et vaut donc $\lambda/2$. Ces points sont caractérisés par les deux équations

$$\frac{\lambda}{2}u(4-3u) = \frac{\lambda}{2}$$
$$\frac{\lambda}{2}(3v^2 - 4v + 2) = \frac{\lambda}{2}$$

Pour la courbe $\mathcal{C}_{AC}$, on a les deux valeurs $u = 1$ et $u = 1/3$ et les valeurs $v = 1$ et $v = 1/3$ pour la courbe $\mathcal{C}_{BC}$. Comme une courbe de Bézier passe nécessairement par ses points extrémaux, le premier point d'intersection est obtenu grâce à

$$M_{AC}(1) = M_{BC}(1) = C.$$

On en déduit que le second point d'intersection (qui a pour abscisse $\lambda/2$) est donné par

$$M_{AC}(\frac{1}{3}) = M_{BC}(\frac{1}{3}).$$

On calcule l'ordonnée de ce point noté D à partir de (1) et on obtient :

$$D = M_{AC}(\frac{1}{3}) = \begin{pmatrix} \frac{\lambda}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{9}\frac{\lambda}{2} \end{pmatrix}$$

Question 4. Quels angles forment les tangentes aux deux points d'intersection des deux courbes $\mathcal{C}_{AC}$ et $\mathcal{C}_{BC}$?

Réponse : Il y a (au moins) deux façons d'y arriver, la première en calculant l'équation de la tangente aux points d'intersection : on a

$$M'_{AC}(u) = \lambda \begin{pmatrix} 2 - 3u \\ u\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Pour $u = 1$ et $u = 1/3$, on obtient

$$M'_{AC}(1) = \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}, \qquad M'_{AC}(\frac{1}{3}) = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de ces deux points permettent de calculer la pente de la tangente. Ainsi si on note α_C l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente en C à la courbe $\mathcal{C}_{AC}$ (resp. α_D l'angle entre la tangente en C à la courbe $\mathcal{C}_{AC}$ et l'axe des abscisses), on a

$$\tan \alpha_C = \sqrt{3}, \qquad \tan \alpha_D = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Autrement dit,

$$\alpha_C = \frac{\pi}{3}, \qquad \alpha_D = \frac{\pi}{6}.$$

Finalement, compte tenu des symétries, les angles entre les deux courbes sont $2\alpha_C$ et $2\alpha_D$, soit $2\pi/3$ et $\pi/3$ (ou $\pi/3$ et $2\pi/3$ selon l'angle observé).

On pouvait obtenir le même résultat beaucoup simplement puisque chaque courbe s'obtient par rotation d'angle $2\pi/3$ ou $4\pi/3$ des deux autres…