MASTER D'INFORMATIQUE — INFOGRAPHIE

Première session. vendredi 12 juin 1998

La précision et la clarté de votre rédaction sont *fondamentales*. Pas de délire pseudo-mathématique SVP. Tous les documents sont autorisés. Durée 1 heure. Bonne année !

On considère la courbe de Bézier quadratique associée aux points de contrôle $M_0 = (0,1)$, $M_1 = (1,1)$, $M_2 = (1,0)$.

(1) Calculez la distance $d(u)$ de $M(u)$ à l'origine $O = (0,0)$ en fonction de u, où $M(u)$ désigne le point générique de la courbe de Bézier :

$$M(u) = \sum_{p=0}^{2} \binom{2}{p} B_{2,p}(u) M_p, \quad u \in [0,1].$$

(2) Étudiez la fonction $u \mapsto d(u) - 1$ sur l'intervalle $[0,1]$ (variation, minimum, maximum).

(3) En déduire que la boule unité

$$B(O,1) = \{M \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},\ d(M,O) \leq 1\}$$

est incluse dans l'enveloppe convexe de la courbe de Bézier par morceaux, jonction des quatre courbes de Bézier quadratiques définies respectivement par les points de contrôle suivants :

(a) $M_0 = (0,1)$, $M_1 = (1,1)$, $M_2 = (1,0)$.
(b) $M_3 = (1,0)$, $M_4 = (1,-1)$, $M_5 = (0,-1)$.
(c) $M_6 = (0,-1)$, $M_7 = (-1,-1)$, $M_8 = (-1,0)$.
(d) $M_9 = (-1,0)$, $M_{10} = (-1,1)$, $M_{11} = (0,1)$.

(4) Quelle est la classe de continuité des différentes jonctions ?

(5) Montrez que si l'on fait subir une rotation de centre Ω à l'ensemble des points de contrôle d'une courbe de Bézier, la courbe de Bézier associée à ces nouveaux points est la rotation de centre Ω de la courbe de Bézier initiale. Est-ce encore vrai pour une translation, une symétrie, une homothétie ?

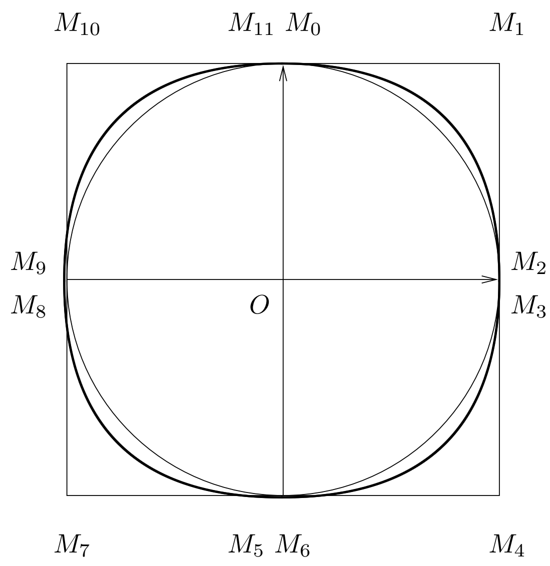

FIGURE 1. Jonction de quatre courbe de Bézier quadratiques