MASTER D'INFORMATIQUE — INFOGRAPHIE

Deuxième session. lundi 11 septembre 2000

Durée 1 heure. Je tiendrai particulièrement compte de la clarté et la concision de votre copie.

Exercice 1. On considère la courbe de Bézier quadratique dont les points de contrôle sont les points suivants du plan réel :

$$M_0 = (0,0), \quad M_1 = (m,1), \quad M_2 = (1,0), \qquad m \in [0,1].$$

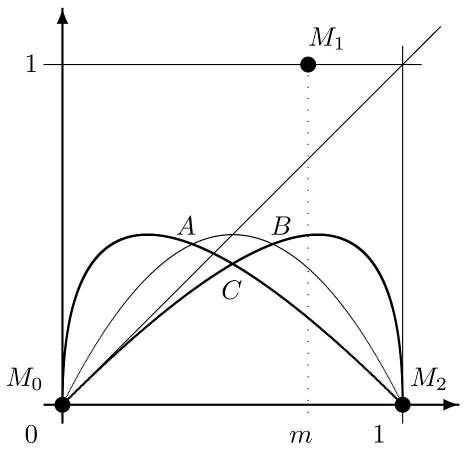

FIGURE 1. Points de contrôle de la courbe de Bézier quadratique.

(1) Calculez l'expression du point générique de la courbe de Bézier paramétrée par m associée.

(2) Tracez à l'aide de différentes couleurs sur le même plan cette courbe pour les valeurs suivantes $m = 0,\ m = 1/2$ et $m = 1$. En quels points se rencontrent ces courbes ?

(3) Calculez l'équation de la tangente (paramétrée par m) à cette courbe au point M_0.

(4) Calculez l'angle que forment la tangente à la courbe au point M_0 pour $m = 0$ avec la tangente à la courbe au même point M_0 pour $m = 1$. Faites un dessin.

Réponse : 1. On a $M(u) = M_0(1-u)^2 + 2M_1(1-u)u + M_2u^2$. On obtient donc :

$$M(u) = \begin{pmatrix} 2m(1-u)u + u^2 \\ 2(1-u)u \end{pmatrix} \tag{1}$$

2. Voir le tracé ci-dessus. Pour trouver les points d'intersection, on peut se contenter de calculer les points d'intersection entre la courbe $C(0)$ et $C(1/2)$ et par symétrie des deux courbes $C(0)$ et $C(1)$ par rapport à la droite d'équation $x = 1/2$, on déduira les points d'intersection entre $C(1/2)$ et $C(1)$. Cette symétrie permet de déduire immédiatement les points d'intersection entre $C(0)$ et $C(1)$. Par construction les courbes se rencontrent deux-à-deux aux points M_0 et M_2, c'est une propriété des courbes de Bézier. La symétrie de la construction indique qu'il y a un point d'intersection C d'abscisse $1/2$, ce qui remplacé dans (1) pour $m = 0$ donne $u^2 = 1/2$ et donc $u = 1/4$, d'où $C = (1/2, 3/8)$. Pour le point d'intersection A entre $C(0)$ et $C(1/2)$, il faut un peu plus de travail et résoudre le système

$$\begin{aligned} u^2 &= v \\ 2(1-u)u &= 2(1-v)v \end{aligned}$$

En remplaçant v par u^2 dans la deuxième équation et après la résolution d'une équation du second degré dont on ne conserve que la solution dans l'intervalle $[0,1]$, on obtient :

$$u = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Et le point d'intersection

$$A = \begin{pmatrix} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \\ \frac{4\sqrt{5}-8}{2} \end{pmatrix}$$

Par symétrie, on obtient le point d'intersection B entre $C(1)$ et $C(1/2)$:

$$B = \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^2 \\ \frac{4\sqrt{5}-8}{2} \end{pmatrix}.$$

3. Un simple calcul nous donne l'équation paramétrique de la tangente :

$$T(v) = M_0 + vM'(u)|_{u=0} = 2v \begin{pmatrix} m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

4. Pour $m = 0$, il s'agit de l'axe des ordonnées et pour $m = 1$ c'est la diagonale issue de l'origine et de pente $1/2$. L'angle formée par ces deux droites est $\pi/4$.