Master d'Informatique. D22 - Complexité Algorithmique.
Le problème SAT et 7 problèmes NP-complets

1. Le problème SAT

Problème SAT [SATISFAISABILITÉ]
Instance : Un ensemble de variables booléennes U et un ensemble de clauses C sur U.
Question : Existe-t-il une instanciation des variables de U qui satisfait l'ensemble des clauses de C ?

Exemple : $U = \{u_1, u_2, u_3\}$ et $C = \{\{\overline{u}_1, u_2, u_3\}, \{u_1, \overline{u}_3\}\}$. Il y a trois variables et un ensemble de deux clauses à trois et deux littéraux respectivement. Satisfaire C signifie affecter une valeur de vérité VRAI ou FAUX à chacune des trois variables u_1, u_2 et u_3 de telle manière que l'expression booléenne suivante soit vraie :

$$(\overline{u}_1 \vee u_2 \vee u_3) \wedge (u_1 \vee \overline{u}_3)$$

Ici, la clause est évidemment satisfaisable, il suffit de prendre $u_1 = u_2 =$ VRAI et une valeur de vérité quelconque pour u_3.

2. Le problème 3-SAT

Problème 3-SAT [SATISFAISABILITÉ SUR TROIS LITTÉRAUX]
Instance : Un ensemble de variables booléennes U et un ensemble de clauses C à trois littéraux sur U.
Question : Existe-t-il une instanciation des variables de U qui satisfait l'ensemble des clauses de C ?

Exemple : $U = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ et $C = \{\{\overline{u}_1, u_2, u_3\}, \{u_1, \overline{u}_3, u_4\}\}$. Toutes les clauses de C (il y en a deux) ont exactement trois littéraux.

3. Le problème 3DM

Problème 3DM [MARIAGE TRI-DIMENSIONNEL]
Instance : Trois ensembles X, Y et Z deux-à-deux disjoints de même cardinal q et une partie $M \subseteq X \times Y \times Z$.
Question : Existe-t-il un mariage tri-dimensionnel, i.e. un sous-ensemble $M' \subseteq M$ de cardinal q tel que deux triplets quelconques de M' diffèrent sur chacune des trois projections.

Exemple : $X = \{\text{Bob}, \text{Tim}, \text{Buck}\}$, $Y = \{\text{Léa}, \text{Flo}, \text{May}\}$, $Z = \{\text{Durex}, \text{Manix}, \text{Lubrix}\}$ et

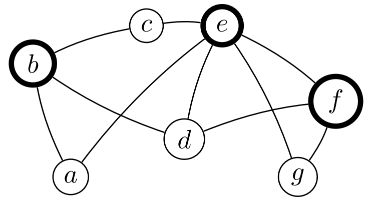
$$M = \{(\text{Bob}, \text{Léa}, \text{Manix}), (\text{Bob}, \text{Flo}, \text{Lubrix}), (\text{Tim}, \text{May}, \text{Manix}), (\text{Buck}, \text{Flo}, \text{Durex}), (\text{Buck}, \text{Léa}, \text{Durex})\}$$

Ici $q = 3$ et cette instance du problème admet une solution :

$$M' = \{(\text{Bob}, \text{Flo}, \text{Lubrix}), (\text{Tim}, \text{May}, \text{Manix}), (\text{Buck}, \text{Léa}, \text{Durex})\}$$

4. Le problème VC

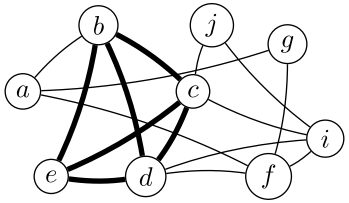
Problème VC [RECOUVREMENT DES SOMMETS]
Instance : Un graphe $G = (X, U)$ et un entier positif $K \leq |X|$.
Question : Existe-t-il un recouvrement des sommets de taille inférieure à K, autrement dit un sous-ensemble $Y \subseteq X$, $|Y| \leq K$ tel que $\forall (x, y) \in U$, $x \in Y$ ou $y \in Y$?



Dans le graphe ci-dessus et pour $K = 3$, il y a une solution $Y = \{b, e, f\}$. Pour $K = 2$ il n'y a pas de solution.

5. Le problème CL

Problème CL [CLIQUE]
Instance : Un graphe $G = (X, U)$ et un entier positif $K \leq |X|$.
Question : Existe-t-il une clique de taille supérieure à K, autrement dit un sous-ensemble $Y \subseteq X$ d'au moins K sommets tels que $\forall (x, y) \in Y \times Y$, $(x, y) \in U$.



Pour le graphe ci-dessus et $K = 4$, le problème a une solution $Y = \{b, c, d, e\}$. Pour $K = 5$, il n'y a pas de solution.

6. Le problème HC

Problème HC [circuit hamiltonien]
Instance : Un graphe $G = (X, U)$, $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
Question : Existe-t-il un circuit hamiltonien, c'est-à-dire une permutation $\pi \in S_n$ telle que $(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n)}, x_{\pi(1)})$ constitue un circuit du graphe.

7. Le problème XC

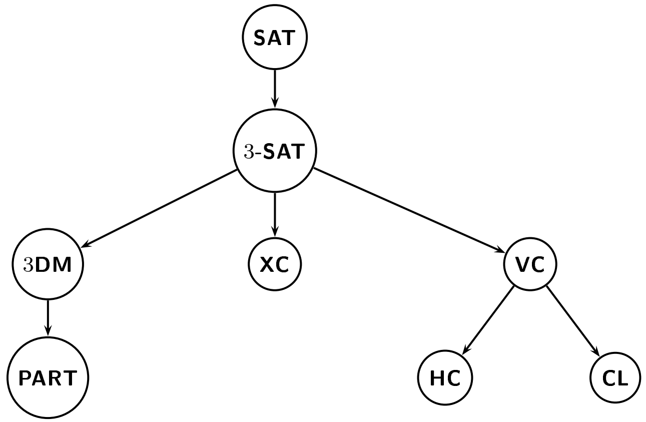
Problème XC [couverture exacte]
Instance : Un ensemble E et $S \subseteq \mathcal{P}(E)$.
Question : Existe-t-il un sous-ensemble P de S qui constitue une partition (couverture exacte) de E ?

Exemple trivial : soit $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $S = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{1, 5\}, \{5\}\}$. La réponse est oui avec $T = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}\}$.

8. Le problème PART

Problème PART [partition]
Instance : Un ensemble fini X et une fonction taille $t : X \to \mathbf{N}$.
Question : Existe-t-il un sous-ensemble $Y \subseteq X$ tel que

$$\sum_{x \in Y} t(x) = \sum_{x \in X \setminus Y} t(x) \ ?$$



Ordre des preuves de NP-complétude.