Master DID - Complexité Algorithmique - Session 1

Mardi 09 avril 2019. 09h00-12h00. Salle Z-011

La précision et la clarté de vos réponses sont *fondamentales*. Chaque réponse doit être justifiée. Barème indicatif et documents interdits. Durée 1h30.

Exercice 1. [2 pts] Questions de cours :

(1) Rappelez la définition d'un problème NP-difficile.

(2) Si Π désigne un problème de décision et e un schéma d'encodage sur un alphabet Σ, rappelez la définition du langage $\mathrm{L}[\Pi, e]$.

(3) Quelle(s) propriété(s) la relation $\propto$ définie sur l'ensemble des langages satisfait-t-elle ?

(4) Démontrez que $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{NP}$.

Exercice 2. [2 pts] On considère le problème de décision Π suivant :

> **Problème Parité**
> *Instance :* Un couple d'entiers (a, b).
> *Question :* Les deux entiers a et b ont-ils la même parité ?

On considère l'alphabet $\Sigma = \{0, 1\}$ et on suppose que l'encodage du couple (a, b) est le mot $e(a, b) := \square^\infty \underline{a_0} a_1 \ldots a_{n-1} \square b_0 b_1 \ldots b_{m-1} \square^\infty$ de $(\Sigma \cup \{\square\})^*$ où $x_0 x_1 \ldots x_{k-1}$ est l'écriture binaire de l'entier x avec

$$x = \sum_{i=0}^{k-1} x_i 2^i.$$

(1) Exprimez le langage $L[\Pi, e]$ à l'aide d'expressions régulières.

(2) Écrivez un programme sur une machine de Turing qui reconnaît $L[\Pi, e]$. Expliquez votre algorithme et commentez votre programme.

(3) Démontrez que ce programme est polynomial en (n, m). Que concluez-vous ?

Exercice 3. [6 pts] On considère le problème du k-coloriage suivant :

> **Problème k-COL** [k-COLORIAGE]
> *Instance :* Un graphe non-orienté $G = (X, U)$.
> *Question :* Peut-on colorier les sommets de X sans que deux sommets adjacents aient la même couleur avec au plus k couleurs ?

1. [0.5 pt] Montrez que le problème 3-COL est dans la classe NP.

2. [1 pt] Si l'on suppose qu'une instance de 3-SAT ne contient que des clauses distinctes et que les 3 littéraux de chaque clause sont de variables distinctes, calculez le nombre maximum de clauses possibles avec n variables pour 3-SAT.

On considère le graphe à 9 sommets ci-contre (à gauche) et un 3-coloriage avec les couleurs BLANC, GRIS et NOIR. Pour plus de compacité, un tel graphe sera représenté par un "circuit" $(u, v, w) \mapsto s$ d'*entrées* (u, v, w) et de *sortie* s (à droite) :

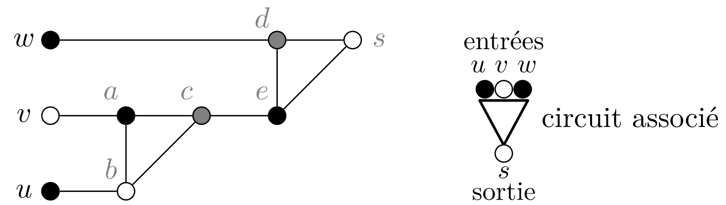

FIGURE 1. Exemple de 3-coloriage du circuit à 9 sommets.

3. [1 pt] Montrez que si les trois entrées u, v et w sont NOIRES, alors la sortie s est nécessairement NOIRE si l'on veut obtenir un 3-coloriage du circuit.

4. [1 pt] Montrez qu'en coloriant chaque entrée u, v et w d'un circuit en NOIR ou en BLANC, on peut toujours compléter le 3-coloriage de manière à ce que la sortie s du circuit soit BLANCHE.

À partir d'une instance (V, C) du problème 3-SAT d'ensemble de variables $V := \{x_1, \ldots, x_n\}$ et de clauses $C := \{C_1, \ldots, C_m\}$, on construit une instance $G = (X, U)$ du problème 3-COL de la manière suivante :

(1) Pour chaque variable $x_i \in V$, on crée 2 sommets "littéraux" x_i et $\overline{x}_i$ dans X et on les connecte.

(2) Pour chaque clause $C_i = \{u_i, v_i, w_i\}$ on crée 6 nouveaux sommets $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, s_i$ dans X pour constituer un circuit avec pour entrées les trois littéraux u_i, v_i et w_i de la clause C_i (ces trois sommets littéraux ont déjà été construits en (1)).

(3) On crée un sommet L que l'on connecte à tous les littéraux.

(4) On crée un sommet S que l'on connecte à toutes les sorties s_i et à E.

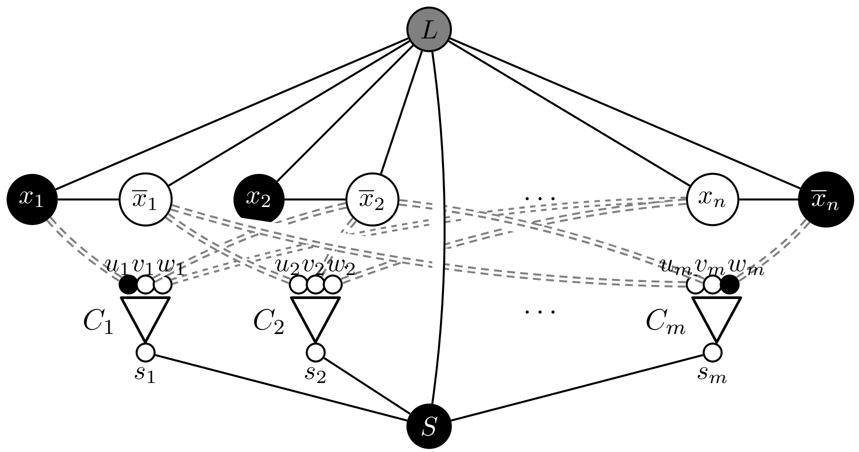

FIGURE 2. Transformation d'une instance $(V, C))$ de 3-SAT en instance (X, U) de 3-COL.

Attention ! Dans le schéma, pour faciliter la compréhension de la construction du graphe, les "entrées" (u_i, v_i, w_i) des circuits sont distinguées des littéraux x_i et $\overline{x}_i$ alors qu'ils sont *confondus*. Ces égalités sont matérialisées en traitillés, les vrais arcs du graphe sont en traits pleins. Dans l'exemple,

$$C_1 = \{\underset{u_1}{x_1}, \underset{v_1}{\overline{x}_2}, \underset{w_1}{x_n}\} \qquad C_2 = \{\underset{u_2}{\overline{x}_1}, \underset{v_2}{\overline{x}_2}, \underset{w_2}{x_n}\} \qquad \cdots \qquad C_m = \{\underset{u_m}{\overline{x}_1}, \underset{v_m}{\overline{x}_2}, \underset{w_m}{\overline{x}_n}\}$$

5. [1 pt] Démontrez que si l'instance de 3-SAT est satisfaisable, alors le graphe est 3-coloriable. Indication : BLANC ≡ VRAI et NOIR ≡ FAUX.

6. [1 pt] Réciproquement, démontrez que si le graphe est 3-coloriable alors l'instance de 3-SAT est satisfaisable. Indication : vous supposerez que S est noir puis que S est gris (n'importe quelle permutation des trois couleurs d'un 3-coloriage définit un autre 3-coloriage).

7. [0.5 pt] Dénombrez le nombre de sommets s et le nombre d'arcs a de ce graphe en fonction de n et m et prouvez que cette transformation est polynomiale en n et m. Concluez.