Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique UE-22.

TD 7. Groupes[1]

EXERCICE 1. Démontrez qu'un magma unifère n'a qu'un élément neutre.

EXERCICE 2. Soit X un ensemble et $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Démontrez que $(\mathscr{P}(X), \cup)$ est un magma. Ce magma est-il commutatif, associatif, unifère ? Même question pour $(\mathscr{P}(X), \cap)$.

EXERCICE 3. Démontrez que l'intersection est distributive sur la réunion et réciproquement sur l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des parties d'un ensemble X.

EXERCICE 4. Démontrez que si $(X, \diamond)$ est un monoïde, alors :

(1) Tout élément symétrisable à gauche (resp. à droite) est régulier à gauche (resp. à droite).

(2) Si un élément est symétrisable, son symétrique à gauche est égal à son symétrique à droite.

(3) Si un élément est symétrisable, son symétrique est unique.

(4) Le composé de deux éléments symétrisables est symétrisable.

EXERCICE 5. Démontrez que si X et Y sont deux magmas, alors la bijection réciproque f^{-1} d'un morphisme bijectif $f : X \to Y$ est nécessairement un morphisme. Démontrez que si X et Y sont munis de relations binaires, alors la bijection réciproque f^{-1} d'un morphisme bijectif $f : X \to Y$ n'est *pas* nécessairement un morphisme. Indication : choisir l'égalité comme relation d'ordre sur X , une relation d'ordre $\leqslant$ sur Y et f un morphisme d'ensembles ordonnés.

EXERCICE 6. Soit X, Y et Z trois ensembles structurés et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux morphismes.

(1) Démontrez que l'application $g \circ f$ est un morphisme de $X \to Z$.

(2) On suppose à présent que ces trois ensembles ont une structure de magma et que f et g sont des isomorphismes. Démontrez que $g \circ f$ est un isomorphisme de $X \to Z$.

1. version du 5 septembre 2024 [09:23]

EXERCICE 7. On numérote les jours à l'aide des entiers relatifs, le jour 0 étant fixé au dimanche 4 mars 1962. On définit une relation binaire $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{Z}$ par

$$x \mathrel{\mathscr{R}} y \Leftrightarrow 7 \mid (y - x).$$

(1) Démontrez que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

(2) Quelles sont les différentes classes d'équivalence pour cette relation ?

(3) Soit φ la surjection canonique, on note dim $:= \varphi(0)$, lun $:= \varphi(1), \ldots$, sam $:= \varphi(6)$. Démontrez que $\mathscr{R}$ est compatible avec l'addition de $\mathbb{Z}$.

(4) Dressez la table d'addition de $\mathbb{Z}/\mathscr{R}$ pour la loi induite $+$

EXERCICE 8. Soit $(X, \diamond)$ un magma et Y un ensemble et $f : X \to Y$ une bijection. Explicitez comment transporter la structure de magma de X sur Y à l'aide de f.

EXERCICE 9. ‡ Vérifiez que $(\mathbb{N}, +)$ est un monoïde commutatif.

(1) Démontrez que la relation binaire $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par

$$(n, m) \mathrel{\mathscr{R}} (n', m') \quad \Leftrightarrow \quad n + m' = n' + m$$

est une relation d'équivalence.

(2) Démontrez que la loi de composition interne $\boxplus$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par

$$(n, m) \boxplus (n', m') := (n + n', m + m')$$

est associative et commutative et montrez que la relation $\mathscr{R}$ est compatible avec $\boxplus$.

(3) On munit l'ensemble quotient $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathscr{R}$ de la loi quotient $\boxplus$. Quel est son élément neutre ? Exhibez un symétrique pour tout élément $\overline{(n, m)}$ de $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathscr{R}$.

(4) Démontrez que les couples $(n, 0)$ et $(0, m)$ pour tout entier n et tout entier m décrivent tous les représentants des classes d'équivalences de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pour la relation $\mathscr{R}$.

(5) Dessinez les classes d'équivalences $\overline{(0, 0)}$, $\overline{(1, 0)}$, $\overline{(2, 0)}$, $\overline{(3, 0)}$ et $\overline{(0, 1)}$, $\overline{(0, 2)}$, $\overline{(0, 3)}$ dans le plan discret $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(6) On définit $G := \{\overline{(n, 0)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ sous-ensemble de $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathscr{R}$. Démontrez que l'application $f : (\mathbb{N}, +) \to (G, \boxplus)$ définie par

$$f(n) := \overline{(n, 0)}$$

est un isomorphisme.

(7) Quel ensemble reconnaissez vous en $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathscr{R}$?

EXERCICE 10. Démontrez qu'il existe une unique loi de groupe sur un singleton, explicitez cette loi. Même question pour une paire. Ces groupes sont-ils commutatifs ?

EXERCICE 11. † Démontrez le théorème de caractérisation d'un sous-groupe du cours : Soit $(G, \diamond)$ un groupe et $H \subseteq G$, alors les 4 propositions suivantes sont équivalentes :

(1) H est un sous-groupe de G.

(2) H est stable et $e \in H$ et $\forall x \in H \quad x^{-1} \in H$.

(3) H est stable et $H \neq \varnothing$ et $\forall x \in H \quad x^{-1} \in H$.

(4) $H \neq \varnothing$ et $\forall (x, y) \in H \times H \quad x \diamond y^{-1} \in H$.

EXERCICE 12. † Soit $(G, \diamond)$ un groupe.

(1) Montrez que l'ensemble noté $S(G)$ des bijections de l'ensemble G dans lui-même muni de la loi de composition des applications $\circ$ est un groupe.

(2) Montrez que le sous-ensemble $\mathrm{Aut}(G)$ de $S(G)$ des *automorphismes* (morphismes bijectifs) muni de la loi induite est un sous-groupe de $(S(G), \circ)$.

EXERCICE 13. † Soit $(G, \diamond)$ un groupe.

(1) Démontrez que l'application $\varphi_a : G \to G$ définie par $x \mapsto \quad a \diamond x \diamond a^{-1}$ est un automorphisme du groupe (dit *automorphisme intérieur* de G).

(2) Quel est l'automorphisme réciproque de φ_a ?

(3) Démontrez que l'application $\varphi : a \mapsto \varphi_a$ est un morphisme du groupe $(G, \diamond)$ dans le groupe $(\mathrm{Aut}(G), \circ)$.

(4) Vérifiez que $\mathrm{Ker}(\varphi) = Z(G)$.

EXERCICE 14. Énumérez toutes les permutations de S_3 et explicitez les cycles.

EXERCICE 15. Soit n un entier tel que $n \geqslant 4$ et a, b, c et d quatre entiers distincts dans $[\![1, n]\!]$. Calculez le produit de transpositions $\sigma := (a\ b)(c\ d)(d\ a)$.

EXERCICE 16. † Soit σ une permutation.

(1) Démontrez que si σ est un p-cycle, alors $\sigma^p = \mathrm{Id}$.

(2) En déduire que $\forall n \in \mathbb{Z} \quad \sigma^n = \sigma^r$ où r désigne le reste de la division euclidienne de n par p.

(3) Calculez l'inverse d'un p-cycle.

EXERCICE 17. Soit n un entier naturel. Montrez qu'une permutation $\sigma \in S_n$ différente de l'identité et involutive, c'est-à-dire telle que $\sigma^2 = \mathrm{Id}$, n'est pas nécessairement une transposition.

EXERCICE 18. † Démontrez que l'ordre d'une permutation est le PPCM des longueurs des cycles à supports disjoints de cette permutation.

EXERCICE 19. On considère la permutation σ suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) Décomposez σ en produits de cycles à supports disjoints.

(2) Calculez la signature de σ.

(3) Décomposez σ en produit de transpositions.

(4) Calculez σ^{2021}.

EXERCICE 20. Soit n et p deux entiers tels que $2 \leqslant p \leqslant n$. Combien le groupe S_n possède-t-il de p-cycles ?

EXERCICE 21. Soit n un entier tel que $n \geqslant 1$. Calculez la signature de la permutation $\sigma \in S_n$ définie par $\sigma(k) := k + 1$ si $k < n$ et $\sigma(n) := 1$.

EXERCICE 22. Décrivez toutes les permutations des groupes S_1 et S_2. Montrez que ces groupes sont commutatifs.

EXERCICE 23. Quelles sont les orbites de la permutation identité ?

EXERCICE 24. Soit $\sigma \in S(X)$ et $\mathscr{O}$ une orbite suivant σ. Démontrez que la restriction de σ à $\mathscr{O}$ est une bijection.

EXERCICE 25. Vérifiez que la relation de conjugaison sur un groupe $(G, \diamond)$ est une relation d'équivalence.

EXERCICE 26. Montrez que la classe de conjugaison de la permutation identique Id est réduite à Id quel que soit le groupe symétrique.

EXERCICE 27. Montrez que les transpositions (1 2) et (1 3) sont conjuguées dans S_3.

EXERCICE 28. Énumérez toutes les partitions de l'entier $n = 5$.

EXERCICE 29. † Le *"Le roi des Nains"* est un jeu de cartes qui ne comporte que trois couleurs (les *nains*, les *gobelins* et les *chevaliers*) avec 13 cartes par couleur et qui se joue en 7 donnes. La règle du jeu (la *quête*) change à *chaque* donne. Pour 3 joueurs, on distribue 13 cartes à chaque joueur, on tire au hasard une tuile "quête" qui propose deux règles du jeu, et c'est le joueur qui a le 5 chevalier dans sa main qui en choisit une. Lors d'une donne, le joueur avec le 5 chevalier a le choix entre les deux quêtes suivantes :

(1) Un joueur qui aura ramassé le même nombre de plis qu'un autre joueur gagnera 5 points.

(2) Un joueur qui aura ramassé un nombre de plis différents des autres joueurs gagnera 5 points.

Les deux évènements sont-ils équiprobables ou est-il préférable de choisir une quête plutôt que l'autre ?

EXERCICE 30. Déterminez les classes de conjugaison des groupes S_3 et S_4.