Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique UE-22.

TD 6. Probabilités [1]

Modélisation, espace probabilisé

EXERCICE 1. Proposez un univers des possibles Ω pour chacune des expériences aléatoires suivantes :

(1) On lance un dé à 6 faces.

(2) On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

(3) On lance une pièce de monnaie.

(4) On tire une boule d'une urne contenant 5 boules numérotées

(5) On observe la couleur des feux de circulation d'un carrefour à un instant donné.

(6) On lance deux dés à six faces identiques.

(7) Une personne choisit au hasard un jour de la semaine.

(8) On tire une boule d'une urne contenant 3 boules rouges, 2 bleues et 1 verte.

(9) On choisit au hasard une lettre dans le mot « mathématique ».

(10) On mesure le temps d'attente (arrondi à la minute) pour un bus, sachant qu'il en passe un toutes les 15 minutes.

EXERCICE 2. On rappelle qu'une partie $\mathscr{T}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu sur un ensemble Ω si elle contient la partie vide $\varnothing$, est stable par complémentation et pour l'intersection dénombrable.

(1) Exprimez formellement ces trois conditions en logique des prédicats.

(2) Déduisez de la propriété d'intersection dénombrable la propriété d'intersection finie.

EXERCICE 3. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On en tire une « au hasard ». Fournissez un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ pour cette expérience aléatoire.

1. version du 3 février 2025 [08:33]

EXERCICE 4. Montrez que les cinq conditions que doit satisfaire une algèbre de Boole sont en partie redondantes.

EXERCICE 5. Vérifiez que $\{\varnothing, \Omega\}$ et $\mathscr{P}(\Omega)$ sont des tribus sur Ω.

EXERCICE 6. Soit Ω un univers au plus dénombrable. Démontrez que la tribu $\mathscr{E} := \sigma(\{\{\omega\} \mid \omega \in \Omega\})$ engendrée par les évènements élémentaires $\{\omega\}$ de Ω est égale à la tribu $\mathscr{P}(\Omega)$.

EXERCICE 7. On considère l'univers $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$.

(1) L'ensemble $\mathscr{A} := \{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\}$ est-il une tribu sur Ω ?

(2) Montrez que $\mathscr{T} := \{\varnothing, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.

Probabilités conditionnelles

EXERCICE 8. Démontrez la loi de probabilité totale :

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(B_i)_{i \in I}$ un système complet d'évènements au plus dénombrable et $A \in \mathscr{T}$. Alors

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid B_i)\, \mathbb{P}(B_i). \tag{1}$$

EXERCICE 9. Démontrez la loi de Bayes :

Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $A \in \mathscr{T}$ et $B \in \mathscr{T}$ satisfaisant $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\, \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{2}$$

EXERCICE 10. Démontrez que les évènements d'une famille $(A_i)_{i \in I}$ d'évènements la globalement indépendants sont deux-à-deux indépendants.

EXERCICE 11. On dispose de deux pièces de monnaie, l'une est équilibrée, l'autre est truquée et tombe sur *face* dans 80% des cas. Une pièce est choisie au hasard, puis lancée. Si le résultat est *face*, quelle est la probabilité que la pièce soit truquée ?

EXERCICE 12. Considérons une famille de $n \geqslant 2$ enfants. Si on s'intéresse au genre (binaire) des enfants, il y a bien sûr 2^n combinaisons et on suppose qu'elles sont équiprobables. Observons les deux évènements suivants :

A : *« la famille a des enfants des 2 sexes »*
B : *« la famille a au plus une fille »*.

(1) Vérifiez l'indépendance ou non de ces évènements pour $n = 3$ et $n = 4$.

(2) Calculez $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$ pour n quelconque et calculez les valeurs de n pour lesquelles les deux évènements sont indépendants.

EXERCICE 13. Dans une famille, il y a deux enfants dont l'un est un garçon. Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

EXERCICE 14. Dans une usine, la production de souris sans fil est réalisée par deux machines A et B qui en produisent respectivement 400 et 600 quotidiennement. La machine A produit 2% de pièces défectueuses et la machine B en produit 3%. En fin de journée, quelle est la probabilité pour qu'une souris défectueuse ait été fabriqué par la machine A ?

EXERCICE 15. † Soit $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $S \in \mathscr{T}$ tel que $\mathbb{P}(S) > 0$. Soit $(B_i)_{i \in I}$ un système complet au plus dénombrable d'évènements de Ω. Démontrez la loi de probabilité totale pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_S$:

$$\forall A \in \mathscr{T} \quad \mathbb{P}_S(A) = \sum_{i \in I} \mathbb{P}_S(A \mid B_i)\, \mathbb{P}_S(B_i). \tag{3}$$

EXERCICE 16. † **(1)** Une urne contient 50 boules blanches et 50 boules noires. Les boules de même couleur sont indistinguables entres elles. Un joueur tire une unique boule de l'urne. Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?

(2) Une urne contient 100 boules numérotées de 1 à 100 et un joueur cherche à retrouver la boule numéro v. Pour ce faire, il peut retirer jusqu'à 50 boules de l'urne. Quelle est la probabilité qu'il retrouve cette boule ?

(3) Vérifier que la probabilité obtenue pour ces deux expériences est la même. En quoi ces deux expériences sont « équivalentes » ?

EXERCICE 17. Un dé à six faces est pipé de sorte que la probabilité d'obtenir un 6 est deux fois plus grande que celle d'obtenir n'importe quel autre chiffre. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

EXERCICE 18. † On note H_k et S_k les sommes suivantes :

$$H_k := \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \qquad S_k := \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k+i}. \tag{4}$$

(1) Écrivez les fonctions *Python* `H(k)` et `S(k)` qui calculent ces sommes. Quelle est la valeur arrondie à 3 décimales après la virgule de $S(50)$?

(2) Calculez la limite suivante, si elle existe (faites votre propre expérience avec vos fonctions Python) :

$$\lim_{k \to \infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k+i}}_{S_k} \tag{5}$$

EXERCICE 19. [Quand le hasard fait bien les choses †] Cet exercice est à traiter après l'étude du chapitre sur les groupes et en particulier le groupe des permutations S_n.

Un tyran propose à 100 prisonniers politiques d'éviter collectivement la peine capitale s'ils trouvent chacun leur nom dans des casiers numérotés de 1 à 100. Chaque détenu peut ouvrir jusqu'à 50 casiers. S'ils trouvent *tous* leur nom, ils sont graciés, sinon ils sont *tous* exécutés.

NB. Seul le détenu qui cherche son nom a accès aux casiers qui sont refermés après son passage et il ne peut pas communiquer avec les autres détenus. En revanche les détenus peuvent établir une stratégie, prendre des notes et les conserver avant d'accéder aux casiers.

(1) Les détenus n'établissent aucune stratégie et chacun d'entre eux ouvre les casiers *"au hasard"*. Quelle est la probabilité qu'ils soient graciés ? Quelle est la loi de probabilité associée ?

(2) Les détenus décident de la stratégie suivante : avant d'être appelés, chacun choisit au hasard un numéro de casier différent de celui des autres codétenus ; ensuite chaque détenu devra ouvrir le casier dont le numéro est celui qu'il a choisi, si le nom du détenu qui s'y trouve n'est pas le sien, il recommence avec le casier dont le numéro est celui de ce détenu et ainsi de suite.

Démontrez qu'en procédant ainsi, la probabilité que tous les détenus soient graciés est proche de 31%. Indications : montrez que chaque détenu suit les valeurs d'un cycle de la permutation qu'ils ont fixée en tirant leurs numéros au hasard. Calculez le nombre de permutations de S_{100} contenant un cycle de longueur strictement supérieure à 50.

EXERCICE 20. ‡ Une galette des rois circulaire de rayon 1 contient une fève circulaire de rayon $r < 1$ et x désigne la distance entre leurs centres. On cherche à calculer la probabilité de rencontrer la fève en coupant la galette en $p \geqslant 2$ parts égales, les p coupes formant des rayons. Pour rencontrer la fève, le couteau doit donc couper le secteur circulaire délimité par le centre O de la galette et les deux rayons tangents à la fève.

(1) Sur un même un schéma, représentez ce secteur pour une fève de centre $F = (x, 0)$ à une distance $x = 0{,}15$ du centre $O = (0, 0)$ de la galette et une autre à une distance $x = 0{,}6$ pour le rayon $r = 0{,}1$.

(2) Quelle est la distance $x_{\min}$ en deça de laquelle on est certain de couper la fève ?

(3) Montrez que l'angle $\theta(x)$ de ce secteur est égal à

$$\theta(x) = 2 \arcsin\left(\frac{r}{x}\right). \tag{6}$$

(4) Vérifiez votre réponse à la deuxième question en calculant $\theta(r)$.

(5) Calculez la surface $S(x)$ de ce secteur.

(6) En déduire la probabilité qu'un coup de couteau tombe sur la fève sachant que son centre F est à la distance x du centre O de la galette.

Lois de probabilité

EXERCICE 21. Une application enregistre l'état d'un serveur toutes les minutes. Chaque minute, le serveur est actif avec une probabilité p (et inactif sinon), indépendamment des autres minutes.

(1) Modélisez l'état du serveur sur une minute donnée avec une loi de probabilité.

(2) Si le serveur est actif avec une probabilité $p = 0{,}95$, quelle est la probabilité qu'il soit inactif exactement 3 fois dans une heure d'observation ?

(3) Quelle est la probabilité qu'il ne soit jamais inactif durant cette heure ?

EXERCICE 22. Un système distribué contient 15 machines. À chaque seconde, chaque machine peut échouer avec une probabilité $p = 0{,}02$, indépendamment des autres machines.

(1) Modélisez le nombre de machines en échec simultanément à un instant donné.

(2) Quelle est la probabilité qu'aucune machine ne soit en échec à un instant donné ?

(3) Calculez la probabilité qu'au moins 2 machines soient en échec simultanément.

EXERCICE 23. Un algorithme effectue des tentatives de connexion à un serveur jusqu'à ce qu'il obtienne une réponse valide. Chaque tentative réussit avec une probabilité $p = 0.1$, indépendamment des autres.

(1) Modélisez le nombre de tentatives nécessaires pour obtenir la première réponse valide.

(2) Quelle est la probabilité que l'algorithme effectue plus de 5 tentatives ?

(3) Déterminez l'espérance et la variance du nombre de tentatives nécessaires.

EXERCICE 24. Un serveur de messagerie *sendmail* reçoit en moyenne 10 requêtes par seconde. On suppose que le nombre de requêtes arrivant par seconde suit une loi de Poisson.

(1) Quelle est la probabilité que le serveur reçoive exactement 12 requêtes en une seconde donnée ?

(2) Quelle est la probabilité qu'il reçoive moins de 3 requêtes durant une demi-seconde ?

(3) Calculez l'espérance et la variance du nombre de requêtes reçues en deux secondes.

EXERCICE 25. Une application de reconnaissance faciale compare une photo cible avec celles d'une base de données constituées de $N = 1000$ images. On sait que $M = 10$ images dans cette base contiennent effectivement la même personne que sur la photo cible. L'application sélectionne $k = 20$ images au hasard pour les comparer.

(1) Modélisez le nombre d'images pertinentes (images contenant la même personne que sur la cible) parmi les 20 sélectionnées.

(2) Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 2 images pertinentes parmi les 20 ?

(3) Quelle est l'espérance du nombre d'images pertinentes dans l'échantillon ?

EXERCICE 26. Un algorithme de contrôle d'intégrité vérifie $N = 100$ blocs de données dans un fichier. Chaque bloc est corrompu avec une probabilité $p = 0{,}01$, indépendamment des autres.

(1) Modélisez le nombre de blocs corrompus.

(2) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun bloc corrompu ?

(3) Quelle est la probabilité qu'au moins 2 blocs soient corrompus ?

EXERCICE 27. Soit A un événement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbb{P})$, et soit $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A définie par :

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

Montrez que l'espérance de la v.a. $\mathbf{1}_A$ est égale à $\mathbb{P}(A)$.

EXERCICE 28. Un QCM contient 20 questions. Chaque question propose 5 réponses possibles, dont une seule est correcte. Si l'étudiant coche uniquement la bonne case, il a un point et 0 point s'il n'en coche aucune. Dans tous les autres cas, il a une pénalité de $-1 \leqslant p < 0$ points. L'étudiant répond à chaque question en cochant une réponse au hasard.

(1) Quelle est la probabilité qu'il obtienne un score de 1 pour une question donnée ?

(2) Quelle est la probabilité qu'il obtienne un score de p pour une question donnée ?

(3) Quelle doit être la valeur de p pour que l'espérance totale du score soit nulle ?

EXERCICE 29. Un algorithme de détection de spam identifie correctement un e-mail comme spam dans 95% des cas. Il signale un e-mail non-spam comme spam dans 3% des cas. On sait que 10% des e-mails reçus sont réellement des spams.

(1) Quelle est la probabilité qu'un e-mail signalé comme spam soit effectivement un spam ?

(2) Calculez la probabilité qu'un e-mail non signalé comme spam soit réellement un spam.

EXERCICE 30. Une usine produit $N = 1000$ pièces, dont $M = 50$ sont défectueuses. On prélève $n = 10$ pièces au hasard sans remise pour effectuer un contrôle qualité.

(1) Modélisez le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon.

(2) Quelle est la probabilité de trouver exactement 2 pièces défectueuses dans l'échantillon ?

(3) Calculez l'espérance et la variance de cette distribution.

EXERCICE 31. Un système génère une permutation aléatoire de $n = 8$ éléments.

(1) Quelle est la probabilité qu'au moins un élément soit à sa position initiale ?

(2) Quelle est la probabilité qu'aucun élément ne soit à sa position initiale (dérangement) ?

(3) Calculez cette probabilité pour $n = 10$.