Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I23.

TD 6. Groupes [1]

EXERCICE 1. Démontrez qu'un magma unifère n'a qu'un élément neutre.

EXERCICE 2. Soit X un ensemble et $\mathscr{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Démontrez que $(\mathscr{P}(X), \cup)$ est un magma. Ce magma est-il commutatif, associatif, unifère ? Même question pour $(\mathscr{P}(X), \cap)$.

EXERCICE 3. Démontrez que l'intersection est distributive sur la réunion et réciproquement sur l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des parties d'un ensemble X.

EXERCICE 4. Démontrez que si $(X, \diamond)$ est un monoïde, alors :

1. Tout élément symétrisable à gauche (resp. à droite) est régulier à gauche (resp. à droite).

2. Si un élément est symétrisable, son symétrique à gauche est égal à son symétrique à droite.

3. Si un élément est symétrisable, son symétrique est unique.

4. Le composé de deux éléments symétrisables est symétrisable.

EXERCICE 5. Démontrez que si X et Y sont deux magmas, alors la bijection réciproque f^{-1} d'un morphisme bijectif $f : X \to Y$ est nécessairement un morphisme. Démontrez que si X et Y sont munis de relations binaires, alors la bijection réciproque f^{-1} d'un morphisme bijectif $f : X \to Y$ n'est *pas* nécessairement un morphisme. Indication : choisir l'égalité comme relation d'ordre sur X , une relation d'ordre $\leqslant$ sur Y et f un morphisme d'ensembles ordonnés.

EXERCICE 6. Soit X, Y et Z trois ensembles structurés et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux morphismes.

1. Démontrez que l'application $g \circ f$ est un morphisme de $X \to Z$.

2. On suppose à présent que ces trois ensembles ont une structure de magma et que f et g sont des isomorphismes. Démontrez que $g \circ f$ est un isomorphisme de $X \to Z$.

1. version du 24 août 2022, 10 : 35

EXERCICE 7. On numérote les jours à l'aide des entiers relatifs, le jour 0 étant fixé au dimanche 4 mars 1962. On définit une relation binaire $\mathscr{R}$ sur $\mathbb{Z}$ par

$$x \;\mathscr{R}\; y \Leftrightarrow 7 \mid (y - x).$$

1. Démontrez que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

2. Quelles sont les différentes classes d'équivalence pour cette relation ?

3. Soit φ la surjection canonique, on note dim $:= \varphi(0)$, lun $:= \varphi(1), \ldots$, sam $:= \varphi(6)$. Démontrez que $\mathscr{R}$ est compatible avec l'addition de $\mathbb{Z}$.

4. Dressez la table d'addition de $\mathbb{Z}/\mathscr{R}$ pour la loi induite $+$

EXERCICE 8. Soit $(X, \diamond)$ un magma et Y un ensemble et $f : X \to Y$ un isomorphisme. Explicitez comment transporter la structure de magma de X sur Y à l'aide de f.

EXERCICE 9. ‡ Vérifiez que $(\mathbb{N}, +)$ est un monoïde commutatif.

1. Démontrez que la relation binaire $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par

$$(n, m) \;\mathscr{R}\; (n', m') \;\Leftrightarrow\; n + m' = n' + m$$

est une relation d'équivalence.

2. Démontrez que la loi de composition interne $\boxplus$ sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ définie par

$$(n, m) \boxplus (n', m') := (n + n', m + m')$$

est associative et commutative et montrez que la relation $\mathscr{R}$ est compatible avec $\boxplus$.

3. On munit l'ensemble quotient $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathscr{R}$ de la loi quotient $\overline{\boxplus}$. Quel est son élément neutre ? Exhibez un symétrique pour tout élément $\overline{(n, m)}$ de $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathscr{R}$.

4. Démontrez que les couples $(n, 0)$ et $(0, m)$ pour tout entier n et tout entier m décrivent tous les représentants des classes d'équivalences de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ pour la relation $\mathscr{R}$.

5. Dessinez les classes d'équivalences $\overline{(0, 0)}$, $\overline{(1, 0)}$, $\overline{(2, 0)}$, $\overline{(3, 0)}$ et $\overline{(0, 1)}$, $\overline{(0, 2)}$, $\overline{(0, 3)}$ dans le plan discret $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

6. On définit $G := \{\overline{(n, 0)} \mid n \in \mathbb{N}\}$ sous-ensemble de $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathscr{R}$. Démontrez que l'application $f : (\mathbb{N}, +) \to (G, \overline{\boxplus})$ définie par

$$f(n) := \overline{(n, 0)}$$

est un isomorphisme.

7. Quel ensemble reconnaissez vous en $(\mathbb{N} \times \mathbb{N})/\mathscr{R}$?

EXERCICE 10. Démontrez qu'il existe une unique loi de groupe sur un singleton, explicitez cette loi. Même question pour une paire. Ces groupes sont-ils commutatifs ?

EXERCICE 11. † Démontrez le théorème de caractérisation d'un sous-groupe du cours : Soit $(G, \diamond)$ un groupe et $H \subseteq G$, alors les 4 propositions suivantes sont équivalentes :

1. H est un sous-groupe de G.

2. H est stable et $e \in H$ et $\forall x \in H \quad x^{-1} \in H$.

3. H est stable et $H \neq \varnothing$ et $\forall x \in H \quad x^{-1} \in H$.

4. $H \neq \varnothing$ et $\forall (x, y) \in H \times H \quad x \diamond y^{-1} \in H$.

EXERCICE 12. † Soit $(G, \diamond)$ un groupe.

1. Montrez que l'ensemble noté $\mathfrak{S}(G)$ des bijections de l'ensemble G dans lui-même muni de la loi de composition des applications $\circ$ est un groupe.

2. Montrez que le sous-ensemble $\text{Aut}(G)$ de $\mathfrak{S}(G)$ des *automorphismes* (morphismes bijectifs) muni de la loi induite est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(G), \circ)$.

EXERCICE 13. † Soit $(G, \diamond)$ un groupe.

1. Démontrez que l'application $\varphi_a : G \to G$ définie par $x \mapsto \quad a \diamond x \diamond a^{-1}$ est un automorphisme du groupe (dit *automorphisme intérieur* de G).

2. Quel est l'automorphisme réciproque de φ_a ?

3. Démontrez que l'application $\varphi : a \mapsto \varphi_a$ est un morphisme du groupe $(G, \diamond)$ dans le groupe $(\text{Aut}(G), \circ)$.

4. Vérifiez que $\text{Ker}(\varphi) = Z(G)$.

EXERCICE 14. Énumérez tous les éléments de $\mathfrak{S}_3$.

EXERCICE 15. Soit n un entier tel que $n \geqslant 4$ et a, b, c et d quatre entiers distincts dans $[\![1, n]\!]$. Calculez le produit de transpositions $\sigma := (a\ b)(c\ d)(d\ a)$.

EXERCICE 16. Démontrez que si σ est un p-cycle, alors $\sigma^p = \text{Id}$. Quelle est l'inverse d'un p-cycle ?

EXERCICE 17. Soit n un entier naturel. Montrez qu'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ involutive, i.e. telle que $\sigma^2 = \text{Id}$ n'est pas nécessairement une transposition.

EXERCICE 18. † Démontrez que l'ordre d'une permutation est le PPCM des longueurs des cycles à supports disjoints de cette permutation.

EXERCICE 19. On considère la permutation σ suivante :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 6 & 7 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

1. Décomposez σ en produits de cycles à supports disjoints.

2. Calculez la signature de σ.

3. Décomposez σ en produit de transpositions.

4. Calculez σ^{2021}.

EXERCICE 20. Soit n et p deux entiers tels que $2 \leqslant p \leqslant n$. Combien le groupe $\mathfrak{S}_n$ possède-t-il de p-cycles ?

EXERCICE 21. Soit n un entier tel que $n \geqslant 1$. Calculez la signature de la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ définie par $\sigma(k) := k + 1$ si $k < n$ et $\sigma(n) := 1$.

EXERCICE 22. Décrivez toutes les permutations des groupes $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$. Montrez que ces groupes sont commutatifs.

EXERCICE 23. Quelles sont les orbites de la permutation identité ?

EXERCICE 24. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(X)$ et $\mathscr{O}$ une orbite suivant σ. Démontrez que la restriction de σ à $\mathscr{O}$ est une bijection.

EXERCICE 25. Vérifiez que la relation de conjugaison sur un groupe $(G, \diamond)$ est une relation d'équivalence.

EXERCICE 26. Montrez que la classe de conjugaison de la permutation identique Id est réduite à Id quel que soit le groupe symétrique.

EXERCICE 27. Montrez que les transpositions $(1\ 2)$ et $(1\ 3)$ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_3$.

EXERCICE 28. Énumérez toutes les partitions de l'entier $n = 5$.

EXERCICE 29. † Le *"Le roi des Nains"* est un jeu de cartes qui ne comporte que trois couleurs (les *nains*, les *gobelins* et les *chevaliers*) avec 13 cartes par couleur et qui se joue en 7 donnes. La règle du jeu (la *quête*) change à *chaque* donne. Pour 3 joueurs, on distribue 13 cartes à chaque joueur, on tire au hasard une tuile "quête" qui propose deux règles du jeu, et c'est le joueur qui a le 5 chevalier dans sa main qui en choisit une. Lors d'une donne, le joueur avec le 5 chevalier a le choix entre les deux quêtes suivantes :

1. Un joueur qui aura ramassé le même nombre de plis qu'un autre joueur gagnera 5 points.

2. Un joueur qui aura ramassé un nombre de plis différents des autres joueurs gagnera 5 points.

Les deux évènements sont-ils équiprobables ou est-il préférable de choisir une quête plutôt que l'autre ?

EXERCICE 30. Déterminez les classes de conjugaison des groupes $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$.