**Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique UE-22.**

TD 5. Combinatoire [1]

**EXERCICE 1.** Démontrez qu'un ensemble naturel $\mathscr{N}$ est totalement ordonné.

**EXERCICE 2.** Considérons $X := \{\upsilon, \zeta, \tau\}$ (*upsilon*, *zêta* et *tau*) muni de l'ordre alphabétique grec et $Y := \{z, t, u\}$ muni de l'ordre alphabétique latin. Démontrez qu'il existe une unique bijection croissante entre $X$ et $Y$ et que sa bijection réciproque est croissante elle aussi.

**EXERCICE 3.** Inspirez vous de la construction d'un successeur pour définir le *prédécesseur* $\operatorname{prec}(n)$ d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Indication : construisez un segment auquel vous appliquerez la deuxième propriété d'un ensemble naturel.

**EXERCICE 4.** † Démontrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \operatorname{pred}(\operatorname{succ}(n)) = n. \tag{1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \operatorname{succ}(\operatorname{pred}(n)) = n. \tag{2}$$

**EXERCICE 5.** † Démontrez que l'application $\operatorname{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ est une bijection croissante. En déduire que l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est un ensemble naturel.

**EXERCICE 6.** Démontrez que l'ensemble des entiers naturels muni de l'ordre naturel est archimédien. Indication : considérez l'ensemble $\{ka \mid k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leqslant k\, a \leqslant b\}$.

**EXERCICE 7.** Soit $X$ un ensemble fini. Explicitez ce qui permet d'écrire que $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (qui est un abus de langage pour $\{x_i \mid i \in [\![1, n]\!]\}$). Même question si $X$ est un ensemble dénombrable pour l'écriture $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

1. version du 5 septembre 2024 [09:23]

**EXERCICE 8.** ‡ Soit $n$ et $m$ deux entiers naturels et $f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_m$ une application. Démontrez que

**(1)** Si $f$ est une injection alors $n \leqslant m$.

**(2)** Si $f$ est une surjection alors $m \leqslant n$.

**(3)** Si $f$ est une bijection alors $n = m$.

**EXERCICE 9.** Soit $n$ un entier naturel. Démontrez par récurrence que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{3}$$

**EXERCICE 10.** Soit $n$ un entier naturel. Démontrez par récurrence que

$$\Big(\sum_{k=0}^{n} k\Big)^2 = \sum_{k=0}^{n} k^3. \tag{4}$$

**EXERCICE 11.** Soit $n$ un entier naturel. Démontrez que la somme des $n$ premiers nombres entiers impairs est égale à $n^2$. Formalisez la question au préalable.

**EXERCICE 12.** † Démontrez que le quotient d'un entier naturel impair et d'un entier naturel pair n'est jamais un nombre entier.

**EXERCICE 13.** ‡ Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. On définit la suite réelle $(H_n)_{n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}}$ par

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Démontrez par récurrence que pour $n \geqslant 2$, $H_n$ n'est pas un entier naturel. Indication : montrez que $H_n$ est une fraction avec un numérateur impair et un dénominateur pair en distinguant le cas où $n$ est pair et $n$ est impair (dans ce dernier cas, séparez les termes de la somme en deux groupes, ceux avec un dénominateur pair et ceux avec un dénominateur impair.)

**EXERCICE 14.** Démontrez par récurrence que pout tout entier naturel $n$, le nombre $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.

**EXERCICE 15.** Démontrez la proposition suivante par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \backslash \{0, 1\} \quad 3^n + 4^n \leqslant 5^n.$$

**EXERCICE 16.** Une *grille* du loto est constituée de 6 numéros tous distincts choisis entre 1 et 49. Combien existe-t-il de grilles différentes ?

**EXERCICE 17.** La carte d'un restaurant propose 3 entrées, 4 plats et 4 desserts. **(1)** Combien de menus différents constitués d'une entrée suivie d'un plat puis d'un dessert (menu *complet*) peut-on constituer ?

**(2)** Même question si le menu peut-être incomplet ?

**EXERCICE 18.** Combien peut-on constituer de numéros de téléphone de 8 chiffres ne contenant pas 0 ?

**EXERCICE 19.** † Un QCM contient 20 questions comportant chacune 4 choix. Combien de QCM différents peut-on produire en mélangeant les questions et les 4 réponses à l'intérieur de chaque question ?

**EXERCICE 20.** Le jeu du *Super Mastermind* se joue à deux. L'un des joueurs crée une *combinaison secrète* en insérant ou non une punaise colorée sur chacun des 5 trous d'une rangée d'un tableau cachée par un paravent à l'autre joueur. Il y a 8 couleurs différentes. (voir fig 1). Il est donc possible de laisser les 5 trous vides ou encore de placer 5 pions de la même couleur. L'autre joueur, en face, doit deviner cette séquence en plaçant sa solution en vis-à-vis.

**(1)** Combien existe-t-il de combinaisons secrètes au *Mastermind* ?

**(2)** Même question si le joueur laisse deux positions vides ?

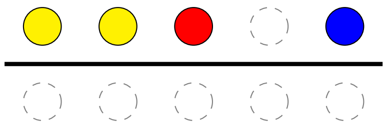

FIGURE 1. Combinaison secrète du *Super Mastermind* : deux pions jaunes, un rouge, une case vide et un pion bleu.

**EXERCICE 21.** Un code de carte bancaire contient 4 chiffres décimaux.

**(1)** Combien peut-on constituer de codes différents ?

**(2)** Même question si les 4 chiffres sont différents ?

**(3)** Même question si deux chiffres au moins sont identiques ?

**EXERCICE 22.** **(1)** Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot *maths* (ces anagrammes sont quelconques, pas nécessairement des mots de la langue française) ?

**(2)** Combien y-a-t-il d'anagrammes *distinctes* du mot *arbre* ?

**EXERCICE 23.** Une *adresse* IP est constituée de 4 nombres non-nuls de 8 bits.

**(1)** Combien existe-t-il d'adresses IP distinctes ?

**(2)** Même question si les 4 nombres sont tous différents ?

**(3)** Même question s'il faut au plus 16 bits nuls ?

**EXERCICE 24.** La classe de I23 comporte $f \geqslant 4$ filles et $g \geqslant 4$ garçons. On veut élire 4 représentants de la classe. Combien peut-on constituer de groupes différents de :

**(1)** 4 filles ?

**(2)** 4 étudiant-e-s ?

**(3)** 4 étudiant-e-s de même sexe ?

**(4)** 4 étudiant-e-s contenant au moins une fille et au moins un garçon ?

**EXERCICE 25.** † On constitue une *main* avec 5 cartes d'un jeu de 32 cartes contenant 8 cartes pour chacune des 4 couleurs : *trèfle* ♣, *carreau* ♢, *cœur* ♡ et *pique* ♠. Combien peut-on constituer de mains différentes ? Combien peut-on constituer de mains différentes contenant *exactement* :

**(1)** une quinte flush (5 valeurs consécutives de même couleur) ?

**(2)** une quinte (5 valeurs consécutives pas de même couleur) ?

**(3)** un carré (4 cartes de même valeur) ?

**(4)** une paire (2 cartes de même valeur) ?

**(5)** deux paires de valeurs différentes ?

**(6)** une couleur ? (5 cartes de valeurs différentes mais de même couleur) ?

**(7)** un brelan (3 cartes de même valeur uniquement) ?

**(8)** un full (un brelan et une paire) ?

**EXERCICE 26.** † Quatre pigeons et 2 moineaux se posent côte à côte sur un cable. On suppose que l'on ne peut pas différencier les pigeons entre eux ni les moineaux.

**(1)** Combien y-a-t-il de dispositions possibles ?

**(2)** Même question avec les pigeons d'un côté et les moineaux de l'autre ?

**(3)** Même question si chaque moineau est entre deux pigeons ?

**(4)** Même question si les moineaux sont côte à côte ?

**EXERCICE 27.** Démontrez que le nombre de $p$-uplets strictement ordonnés d'un ensemble totalement ordonné $X$ à $n$ éléments est égal à $\binom{n}{p}$, le nombre de parties à $p$ éléments d'un ensemble à $n$ éléments.

**EXERCICE 28.** Formalisez et démontrez le *principe des tiroirs* : si $n$ caleçons sont rangées dans $m$ tiroirs (peu importe dans quel ordre) avec $n > m$, un tiroir contient au moins 2 caleçons.

**EXERCICE 29.** De combien de façons différentes peut-on empiler 8 tee-shirts sur une étagère ?

**EXERCICE 30.** † Démontrez que le nombre de rectangles que l'on peut tracer sur un quadrillage de $\ell$ lignes et $c$ colonnes est égal à

$$\frac{\ell(\ell-1)c(c-1)}{4}. \tag{5}$$

**EXERCICE 31.** Soit $p$ et $n$ deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Démontrez les identités suivantes :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \qquad \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

**EXERCICE 32.** Pourquoi le triangle de Pascal permet-il de calculer plus efficacement des coefficients binomiaux qu'en calculant le quotient de la formule ci-dessous ?

$$\binom{n}{p} = \frac{n\,!}{p\,!(n-p)\,!}$$

**EXERCICE 33.** Soit $n$ un entier naturel.

**(1)** Quels sont les coefficients du polynôme $(X+1)^n$ ?

**(2)** Développez l'expression $(x-y)^6$.

**EXERCICE 34.** Soit $p$ et $n$ deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$.

**(1)** Démontrez que si $p \geqslant 1$ alors on a l'égalité suivante, appelée *formule du pion* :

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

**(2)** Puis en déduire que

$$\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p} = n2^{n-1}.$$

**EXERCICE 35.** † On considère la fonction $P(X) := (X^{n+1}-1)/(X-1)$.

**(1)** Soit $Q(X) := 1+X+X^2+\cdots+X^{n-1}+X^n$. Vérifiez que $Q(X) = P(X)$ pour $X \neq 1$. Indication : multipliez $Q(X)$ par $X$ et retrouvez $Q(X)$ dans cette nouvelle expression.

**(2)** Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. En calculant le polynôme dérivé $P'(X)$ de deux façons différentes, calculez la somme

$$S := \sum_{k=1}^{n} kq^k. \tag{6}$$