Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I23.

TD 5. Combinatoire [1]

EXERCICE 1. Démontrez qu'un ensemble naturel $\mathscr{N}$ est totalement ordonné.

EXERCICE 2. Considérons $X := \{\upsilon, \zeta, \tau\}$ muni de l'ordre alphabétique grec et $Y := \{z, t, u\}$ muni de l'ordre alphabétique latin. Démontrez qu'il existe une unique bijection croissante entre X et Y et que sa bijection réciproque est croissante elle aussi.

EXERCICE 3. Inspirez vous de la construction d'un successeur pour définir le *prédécesseur* $\text{prec}(n)$ d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Indication : construisez un segment auquel vous appliquerez la deuxième propriété d'un ensemble naturel.

EXERCICE 4. † Démontrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{pred}(\text{succ}(n)) = n. \tag{1}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{succ}(\text{pred}(n)) = n. \tag{2}$$

EXERCICE 5. † Démontrez que l'application $\text{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ est une bijection croissante. En déduire que l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est un ensemble naturel.

EXERCICE 6. Démontrez que l'ensemble des entiers naturels muni de l'ordre naturel est archimédien. Indication : considérez l'ensemble $\{ka \mid k \in \mathbb{N} \ \wedge \ 1 \leqslant k \ a \leqslant b\}$.

EXERCICE 7. Soit X un ensemble fini. Explicitez ce qui permet d'écrire que $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (qui est un abus de langage pour $\{x_i \mid i \in [\![1, n]\!]\}$). Même question si X est un ensemble dénombrable pour l'écriture $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

1. version du 6 avril 2023, 07 : 35

EXERCICE 8. ‡ Soit n et m deux entiers naturels et $f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_m$ une application. Démontrez que

(1) Si f est une injection alors $n \leqslant m$.

(2) Si f est une surjection alors $m \leqslant n$.

(3) Si f est une bijection alors $n = m$.

EXERCICE 9. Soit n un entier naturel. Démontrez par récurrence que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{3}$$

EXERCICE 10. Démontrez que le quotient d'un entier naturel impair et d'un entier naturel pair n'est jamais un nombre entier.

EXERCICE 11. ‡ Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On définit la suite réelle $(H_n)_{n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}}$ par

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Démontrez par récurrence que pour $n \geqslant 2$, H_n n'est pas un entier naturel. Indication : montrez que H_n est une fraction avec un numérateur impair et un dénominateur pair en distinguant le cas où n est pair et n est impair (dans ce dernier cas, séparez les termes de la somme en deux groupes, ceux avec un dénominateur pair et ceux avec un dénominateur impair.)

EXERCICE 12. Démontrez par récurrence que pout tout entier naturel n, le nombre $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.

EXERCICE 13. Démontrez la propriété suivante par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0, 1\} \quad 3^n + 4^n \leqslant 5^n.$$

EXERCICE 14. Une *grille* du loto est constituée de 6 numéros tous distincts choisis entre 1 et 49. Combien existe-t-il de grilles différentes ?

EXERCICE 15. La carte d'un restaurant propose 3 entrées, 4 plats et 4 desserts. **(1)** Combien de menus différents constitués d'une entrée suivie d'un plat puis d'un dessert (menu *complet*) peut-on constituer ?

(2) Même question si le menu peut-être incomplet ?

EXERCICE 16. Combien peut-on constituer de numéros de téléphone de 8 chiffres ne contenant pas 0 ?

EXERCICE 17. † Un QCM contient 20 questions comportant chacune 4 choix. Combien de QCM différents peut-on produire en mélangeant les questions et les 4 réponses à l'intérieur de chaque question ?

EXERCICE 18. Le jeu du *Super Mastermind* se joue à deux. L'un des joueurs crée une *combinaison secrète* en plaçant des pions de couleur sur 5 cases alignées d'un plateau cachées derrière un paravent (voir fig 1). Dans chaque case, il peut ou non placer un pion de la couleur de son choix, il est donc possible de laisser les 5 cases vides ou de placer 5 pions de la même couleur. L'autre joueur, en face, doit deviner cette séquence en plaçant sa solution en face.

(1) Combien existe-t-il de combinaisons secrètes au *Mastermind* ?

(2) Même question si le joueur laisse deux positions vides ?

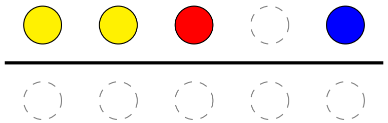

FIGURE 1. Combinaison secrète du *Super Mastermind* : deux pions jaunes, un rouge, une case vide et un pion bleu.

EXERCICE 19. Un code de carte bancaire contient 4 chiffres décimaux.

(1) Combien peut-on constituer de codes différents ?

(2) Même question si les 4 chiffres sont différents ?

(3) Même question si deux chiffres au moins sont identiques ?

EXERCICE 20. **(1)** Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot *maths* (ces anagrammes sont quelconques, pas nécessairement des mots de la langue française) ?

(2) Combien y-a-t-il d'anagrammes *distinctes* du mot *arbre* ?

EXERCICE 21. Une *adresse* IP est constituée de 4 nombres non-nuls de 8 bits.

(1) Combien existe-t-il d'adresses IP distinctes ?

(2) Même question si les 4 nombres sont tous différents ?

(3) Même question s'il faut au plus 16 bits nuls ?

EXERCICE 22. La classe de I23 comporte $f \geqslant 4$ filles et $g \geqslant 4$ garçons. On veut élire 4 représentants de la classe. Combien peut-on constituer de groupes différents de :

(1) 4 filles ?

(2) 4 étudiant-e-s ?

(3) 4 étudiant-e-s de même sexe ?

(4) 4 étudiant-e-s contenant au moins une fille et au moins un garçon ?

EXERCICE 23. † On constitue une *main* avec 5 cartes d'un jeu de 32 cartes contenant 8 cartes pour chacune des 4 couleurs : *trèfle* ♣, *carreau* ♢, *cœur* ♡ et *pique* ♠. Combien peut-on constituer de mains différentes ? Combien peut-on constituer de mains différentes contenant *exactement* :

(1) une quinte flush (5 valeurs consécutives de même couleur) ?

(2) une quinte (5 valeurs consécutives pas de même couleur) ?

(3) un carré (4 cartes de même valeur) ?

(4) une paire (2 cartes de même valeur) ?

(5) deux paires de valeurs différentes ?

(6) une couleur ? (5 cartes de valeurs différentes mais de même couleur) ?

(7) un brelan (3 cartes de même valeur uniquement) ?

(8) un full (un brelan et une paire) ?

EXERCICE 24. † Quatre pigeons et 2 moineaux se posent côte à côte sur un cable. On suppose que l'on ne peut pas différencier les pigeons entre eux ni les moineaux.

(1) Combien y-a-t-il de dispositions possibles ?

(2) Même question avec les pigeons d'un côté et les moineaux de l'autre ?

(3) Même question si chaque moineau est entre deux pigeons ?

(4) Même question si les moineaux sont côte à côte ?

EXERCICE 25. Démontrez que le nombre de p-uplets strictement ordonnés d'un ensemble totalement ordonné X à n éléments est égal à $\binom{n}{p}$, le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

EXERCICE 26. Formalisez et démontrez le *principe des tiroirs* : si n caleçons sont rangées dans m tiroirs (peu importe dans quel ordre) avec $n > m$, un tiroir contient au moins 2 caleçons.

EXERCICE 27. De combien de façons différentes peut-on empiler 8 tee-shirts sur une étagère ?

EXERCICE 28. Soit p et n deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Démontrez les identités suivantes :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \qquad \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

EXERCICE 29. Pourquoi le triangle de Pascal permet-il de calculer plus efficacement des coefficients binomiaux qu'en calculant le quotient de la formule ci-dessous ?

$$\binom{n}{p} = \frac{n\,!}{p\,!(n-p)\,!}$$

EXERCICE 30. Soit n un entier naturel. Quels sont les coefficients du polynôme $(1+X)^n$ une fois développé ? Développez l'expression $(x-y)^6$.

EXERCICE 31. Soit p et n deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$.

(1) Démontrez que si $p \geqslant 1$ alors on a l'égalité suivante, appelée *formule du pion* :

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

(2) Puis en déduire que

$$\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p} = n2^{n-1}.$$

Solution. On a

$$\begin{aligned} p\binom{n}{p} &= \frac{\boldsymbol{p}\; n!}{(n-p)!\; \boldsymbol{p}(p-1)!} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(n-p)!\;(p-1)!} \\ &= n\frac{(n-1)!}{(n-1-(p-1))!\;(p-1)!} \\ &= n\binom{n-1}{p-1}. \end{aligned}$$

Et par conséquent

$$\begin{aligned} \sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p} &= \sum_{p=1}^{n} n\binom{n-1}{p-1} \\ &= n\sum_{p=1}^{n}\binom{n-1}{p-1} \\ &= n2^{n-1}. \end{aligned}$$

EXERCICE 32. † On considère la fonction $P(X) := (X^{n+1}-1)/(X-1)$.

(1) Soit $Q(X) := 1+X+X^2+\cdots+X^{n-1}+X^n$. Vérifiez que $Q(X) = P(X)$ pour $X \neq 1$. Indication : multipliez $Q(X)$ par X et retrouvez $Q(X)$ dans cette nouvelle expression.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. En calculant le polynôme dérivé $P'(X)$ de deux façons différentes, calculez la somme

$$S := \sum_{k=1}^{n} kq^k. \tag{4}$$