

Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I23.

TD 4. Relations, applications¹

EXERCICE 1. Considérons les trois ensembles

$$C := \{R, V, B\}, \quad V := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad G := \{(R, 2), (V, 5), (B, 7)\}.$$

1. Comment qualifie-t-on les éléments de G ?
2. De quel ensemble G est-il un sous-ensemble ?
3. Dessinez le **diagramme sagittal** de la **correspondance** $c := (C, G, V)$.
4. Est-ce une **fonction**, une **application** ?

EXERCICE 2. On considère la correspondance c dont le diagramme sagittal est représenté en figure (1).

1. Écrivez l'ensemble de départ, d'arrivée et le graphe de c en extension.
2. S'agit-il d'une fonction ? D'une application ?
3. Dessinez le diagramme sagittal de la correspondance réciproque.

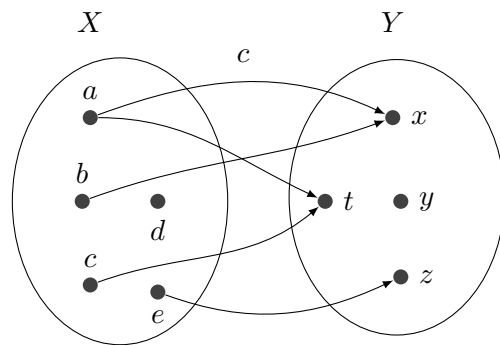


FIGURE 1. Diagramme sagittal de la correspondance c

EXERCICE 3. Écrivez la définition de la correspondance réciproque d'une correspondance $c = (X, G, Y)$.

EXERCICE 4. † Soit X un ensemble non-vide et $f : X \times X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ l'application définie par $f(x, y) := \{x, y\}$ (Il s'agit d'un abus de notation, en toute rigueur on devrait écrire $f((x, y))$).

1. Dessinez le diagramme sagittal de cette application dans le cas particulier où $X := \{x, y, z\}$.
2. Dans le cas général, cette application est-elle **injective** ? **Surjective** ? Justifiez votre réponse.

EXERCICE 5. Soit X un ensemble, $(A, B) \in (\mathcal{P}(X))^2$ avec $A \neq \emptyset$ et $A \neq X$. Soit f et g deux applications de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{P}(X)$ définies par

$$f(B) := A \cup B, \quad g(B) = A \cap B.$$

Ces applications sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

EXERCICE 6. Soit X l'ensemble des étudiants de I23 et $\mathcal{A} := \{a, b, \dots, z\}$ l'alphabet latin. L'application $f : X \rightarrow \mathcal{A}$ qui à tout étudiant associe la première lettre de son nom de famille est-elle injective ?

EXERCICE 7. Les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont-elles des applications ? Si oui sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Quelles modifications sur les ensembles de départ et/ou d'arrivée pour qu'elles vérifient ces propriétés ?

EXERCICE 8. Soit X, Y et Z trois ensembles et $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux applications.

1. Démontrez que $g \circ f$ peut-être injective (resp. surjective) sans que g le soit. Montrez que $g \circ f$ ne peut-être injective si f ne l'est pas.
2. Démontrez que $g \circ f$ peut-être surjective sans que f le soit. Montrez que $g \circ f$ ne peut-être surjective si g ne l'est pas.

EXERCICE 9. † Soit \mathcal{C} le cercle de rayon R et de centre C du plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1. Définissez formellement la correspondance c de graphe \mathcal{C} .
2. Dans un repère orthonormé, tracez les graphes G_c et $G_{c \circ c}$ des correspondances c et $c \circ c$ pour le centre $C := (0, 0)$ et le rayon $R := 1$.

1. version du 8 mars 2023, 13 : 26

EXERCICE 10. [‡] Soit A et B deux parties non-vides d'un ensemble E non-vide. On définit $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ par $f(X) := (X \cap A, X \cap B)$.

1. Démontrez que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Démontrez que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

EXERCICE 11. Exprimez formellement qu'une correspondance n'est pas fonctionnelle en écrivant la négation de :

$$\forall x \in X \quad \forall (y, z) \in Y \times Y \quad ((x, y) \in G \wedge (x, z) \in G) \Rightarrow y = z. \quad (1)$$

Réécrivez la définition d'une fonction en remplaçant cette proposition par sa contraposée.

EXERCICE 12. Soit f et g les deux applications définies par les diagrammes sagittaux de la figure 2.

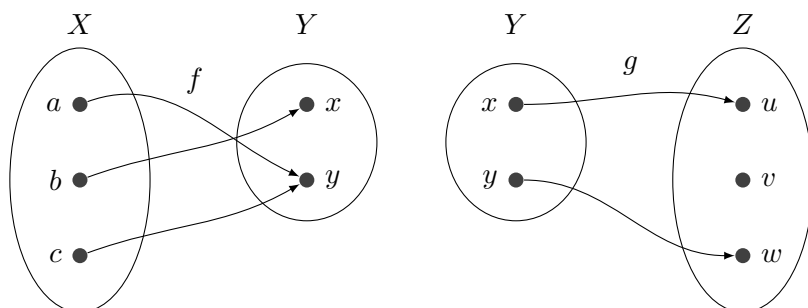


FIGURE 2. Diagrammes sagittaux des applications f et g .

1. Écrivez les graphes G_f et G_g des deux applications f et g respectivement en extension.
2. Ces applications sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
3. Dessinez le diagramme sagittal de la composition $g \circ f$ de ces deux applications et écrivez son graphe $G_{g \circ f}$ en extension.
4. L'application $g \circ f$ est-elle injective, surjective, bijective ?
5. La correspondance réciproque de $g \circ f$ est-elle une fonction ? Une application ?

EXERCICE 13. † Soit $\mathcal{B} := \{0, 1\}$ muni de l'addition et de la multiplication définies sur \mathbb{Z} . Soit X un ensemble quelconque et A et B deux parties de X . On définit la fonction indicatrice de A notée $1_A : X \rightarrow \mathcal{B}$ par

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Que peut-on dire des ensembles A et B si $1_A = 1_B$?
2. Exprimez la fonction indicatrice du complémentaire de A dans X , de $A \cap B$ et de $A \times B$ à l'aide des fonctions indicatrices de A et B .
3. Si les ensembles A et B sont disjoints, exprimez la fonction indicatrice de $A \cup B$.
4. Si A et B sont quelconques, créez une partition de $A \cup B$ qui contient A et un autre ensemble à déterminer. En déduire une expression de la fonction indicatrice de $A \cup B$ à l'aide des fonctions indicatrices de A et B .
5. Soit $f : X \rightarrow Y$ et C une partie de Y . De quel ensemble la fonction $1_C \circ f$ est-elle la fonction indicatrice ?
6. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $(X_i)_{i \in [1, n]}$ une partition de X . Montrez que

$$\sum_{i=1}^n 1_{X_i} = 1_X.$$

EXERCICE 14. Écrivez le domaine de définition \mathcal{D}_f d'une fonction $f : X \rightarrow Y$ de graphe G_f en compréhension. Comment qualifie-t-on l'écriture

$$\mathcal{D}_f = \{glace, alcool, cinéma, smartphone, livre\}. \quad (2)$$

de l'ensemble \mathcal{D}_f ?

EXERCICE 15. La fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $x \mapsto x^2$ est-elle une application ? Si oui, est-elle injective, surjective ? Sa correspondance réciproque est-elle une fonction ?

EXERCICE 16. † Soit $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux bijections. Démontrez que

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Quelle est la nature de la preuve qui permet de généraliser ce résultat à la composition de n applications f_1, f_2, \dots, f_n où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$,

$f_i : X_i \rightarrow Y_i$ avec $Y_i = X_{i+1}$:

$$(f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ \cdots \circ f_{n-1}^{-1} \circ f_n^{-1}.$$

EXERCICE 17. Montrez qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est une bijection si et seulement s'il existe une application $g : Y \rightarrow X$ telle que

$$g \circ f = \text{Id}_X \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_Y. \quad (3)$$

Montrez dans ce cas que g est l'application réciproque f^{-1} de f .

EXERCICE 18. Écrivez la négation logique de chacune des propriétés remarquables du graphe d'une relation binaire sur un ensemble (réflexif, symétrique, transitif, etc.).

EXERCICE 19. On définit une **relation binaire** \mathcal{R} sur l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des applications de \mathbb{N} dans \mathbb{N} par $f \mathcal{R} g$ si et seulement les deux applications sont égales à partir d'un certain rang. Formalisez la définition de cette relation binaire. Démontrez qu'il s'agit d'une **relation d'équivalence** sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

EXERCICE 20. Démontrez que si \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur un ensemble X et $x \in X$, alors

$$\forall y \in \bar{x} \quad \bar{y} = \bar{x}. \quad (4)$$

EXERCICE 21. Démontrez que si \mathcal{R} une relation d'équivalence définie sur un ensemble X alors l'ensemble quotient X/\mathcal{R} est une **partition** de l'ensemble X . Réciproquement démontrez que si $P \subseteq \mathcal{P}(X)$ est une partition de X alors il existe une unique relation d'équivalence \mathcal{R} sur X telle que $X/\mathcal{R} = P$ et qu'elle est définie par

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists A \in P \quad (x \in A) \text{ et } (y \in A). \quad (5)$$

EXERCICE 22. Démontrez que la relation binaire d'inclusion \subseteq définie sur l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties d'un ensemble X est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ou partiel ?

EXERCICE 23. † On définit la relation de divisibilité $|$ sur l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} par

$$a | b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} \quad ac = b.$$

1. Démontrez qu'il s'agit d'une relation d'ordre partiel.
2. Vérifiez que 0 est le plus grand élément pour cette relation.
3. Existe-t-il un plus petit élément ?

On restreint à présent cette relation à l'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

4. Existe-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ?
5. Quels sont alors les éléments minimaux, maximaux s'il en existe ?
6. Tracez le diagramme de Hasse de la relation de divisibilité restreinte à l'ensemble $[1, 15]$.