Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I23.

TD 4. Relations, applications [1]

EXERCICE 1. Considérons les trois ensembles

$$C := \{R, V, B\}, \quad V := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad G := \{(R, 2), (V, 5), (B, 7)\}.$$

(1) Comment qualifie-t-on les éléments de G ?

(2) De quel ensemble G est-il un sous-ensemble ?

(3) Dessinez le diagramme sagittal de la correspondance $c := (C, G, V)$.

(4) Est-ce une fonction, une application ?

EXERCICE 2. On considère la correspondance c dont le diagramme sagittal est représenté en figure (1).

(1) Écrivez l'ensemble de départ, d'arrivée et le graphe de c en extension.

(2) S'agit-il d'une fonction ? D'une application ?

(3) Dessinez le diagramme sagittal de la correspondance réciproque.

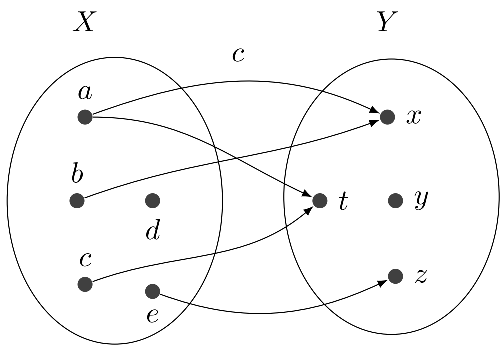

FIGURE 1. Diagramme sagittal de la correspondance c

EXERCICE 3. Écrivez la définition de la correspondance réciproque d'une correspondance $c = (X, G, Y)$.

1. version du 30 avril 2022, 15 : 29

EXERCICE 4. † Soit X un ensemble non-vide et $f : X \times X \to \mathscr{P}(X)$ l'application définie par $f(x, y) := \{x, y\}$ (Il s'agit d'un abus de notation, en toute rigueur on devrait écrire $f((x, y))$).

(1) Dessinez le diagramme sagittal de cette application dans le cas particulier où $X := \{x, y, z\}$.

(2) Dans le cas général, cette application est-elle injective ? Surjective ? Justifiez votre réponse.

EXERCICE 5. Soit X un ensemble, $(A, B) \in (\mathscr{P}(X))^2$ avec $A \neq \varnothing$ et f et g deux applications de $\mathscr{P}(X)$ dans $\mathscr{P}(X)$ définies par

$$f(B) := A \cup B, \qquad g(B) = A \cap B.$$

Ces applications sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

EXERCICE 6. Soit X l'ensemble des étudiants de I23 et $\mathscr{A} := \{a, b, \ldots, z\}$ l'alphabet latin. L'application $f : X \to \mathscr{A}$ qui a tout étudiant associe la première lettre de son nom de famille est-elle injective ?

EXERCICE 7. Les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont-elles des applications ? Si oui sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Quelles modifications sur les ensembles de départ et/ou d'arrivée pour qu'elles vérifient ces propriétés ?

EXERCICE 8. Soit X, Y et Z trois ensembles et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications.

(1) Démontrez que $g \circ f$ peut-être injective (resp. surjective) sans que g le soit. Montrez que $g \circ f$ ne peut-être injective si f ne l'est pas.

(2) Démontrez que $g \circ f$ peut-être surjective sans que f le soit. Montrez que $g \circ f$ ne peut-être surjective si g ne l'est pas.

EXERCICE 9. † Soit $\mathscr{C}$ le cercle de rayon R et de centre C du plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(1) Définissez formellement la correspondance c de graphe $\mathscr{C}$.

(2) Dans un repère orthonormé, tracez les graphes G_c et $G_{c \circ c}$ des correspondances c et $c \circ c$ pour le centre $C := (0, 0)$ et le rayon $R := 1$.

EXERCICE 10. [‡] Soit A et B deux parties non-vides d'un ensemble E non-vide. On définit $f : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ par $f(X) := (X \cap A, X \cap B)$.

(1) Démontrez que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

(2) Démontrez que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

EXERCICE 11. Exprimez formellement qu'une correspondance n'est pas fonctionnelle en écrivant la négation de :

$$\forall x \in X \quad \forall (y,z) \in Y \times Y \quad \big((x,y) \in G \ \wedge \ (x,z) \in G\big) \Rightarrow y = z. \tag{1}$$

Réécrivez la définition d'une fonction en remplaçant cette proposition par sa contraposée.

EXERCICE 12. Soit f et g les deux applications définies par les diagrammes sagittaux de la figure 2.

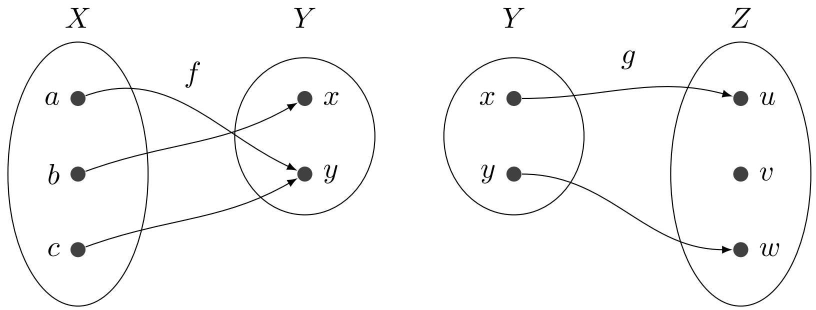

Figure 2. Diagrammes sagittaux des applications f et g.

(1) Écrivez les graphes G_f et G_g des deux applications f et g respectivement en extension.

(2) Ces applications sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

(3) Dessinez le diagramme sagittal de la composition $g \circ f$ de ces deux applications et écrivez son graphe $G_{g \circ f}$ en extension.

(4) L'application $g \circ f$ est-elle injective, surjective, bijective ?

(5) La correspondance réciproque de $g \circ f$ est-elle une fonction ? Une application ?

EXERCICE 13. † Soit $\mathscr{B} := \{0, 1\}$ muni de l'addition et de la multiplication définies sur $\mathbb{Z}$. Soit X un ensemble quelconque et A et B deux parties de X. On définit la *fonction indicatrice* de A notée $1_A : X \to \mathscr{B}$ par

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Que peut-on dire des ensembles A et B si $1_A = 1_B$?

(2) Exprimez la fonction indicatrice du complémentaire de A dans X, de $A \cap B$ et de $A \times B$ à l'aide des fonctions indicatrices de A et B.

(3) Si les ensembles A et B sont disjoints, exprimez la fonction indicatrice de $A \cup B$.

(4) Si A et B sont quelconques, créez une partition de $A \cup B$ qui contient A et un autre ensemble à déterminer. En déduire une expression de la fonction indicatrice de $A \cup B$ à l'aide des fonctions indicatrices de A et B.

(5) Soit $f : X \to Y$ et C une partie de Y. De quel ensemble la fonction $1_C \circ f$ est-elle la fonction indicatrice ?

(6) Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ et $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une partition de X. Montrez que

$$\sum_{i=1}^{n} 1_{X_i} = 1_X.$$

EXERCICE 14. Écrivez le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ d'une fonction $f : X \to Y$ de graphe G_f en compréhension. Comment qualifie-t-on l'écriture

$$\mathscr{D}_f = \{\textit{glace, alcool, cinéma, smartphone, livre}\}. \tag{2}$$

de l'ensemble $\mathscr{D}_f$?

EXERCICE 15. La fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^2$ est-elle une application ? Si oui, est-elle injective, surjective ? Sa correspondance réciproque est-elle une fonction ?

EXERCICE 16. † Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux bijections. Démontrez que

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Quelle est la nature de la preuve qui permet de généraliser ce résultat à la composition de n applications $f_1, f_2, \ldots, f_n$ où pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $f_i : X_i \to Y_i$ avec $Y_i = X_{i+1}$:

$$(f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ \cdots \circ f_{n-1}^{-1} \circ f_n^{-1}.$$

EXERCICE 17. Montrez qu'une application $f : X \to Y$ est une bijection si et seulement s'il existe une application $g : Y \to X$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_X \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_Y. \tag{3}$$

Montrez dans ce cas que g est l'application réciproque f^{-1} de f.

EXERCICE 18. Écrivez la négation logique de chacune des propriétés remarquables du graphe d'une relation binaire sur un ensemble (réflexif, symétrique, transitif, etc.).

EXERCICE 19. On définit une relation binaire $\mathscr{R}$ sur l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par $f \mathscr{R} g$ si et seulement les deux applications sont égales à partir d'un certain rang. Formalisez la définition de cette relation binaire. Démontrez qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

EXERCICE 20. Démontrez que si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur un ensemble X et $x \in X$, alors

$$\forall y \in \overline{x} \quad \overline{y} = \overline{x}. \tag{4}$$

EXERCICE 21. Démontrez que si $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence définie sur un ensemble X alors l'ensemble quotient $X/\mathscr{R}$ est une partition de l'ensemble X. Réciproquement démontrez que si $P \subseteq \mathscr{P}(X)$ est une partition de X alors il existe une unique relation d'équivalence $\mathscr{R}$ sur X telle que $X/\mathscr{R} = P$ et qu'elle est définie par

$$x \mathscr{R} y \Leftrightarrow \exists A \in P \ \ (x \in A) \text{ et } (y \in A). \tag{5}$$

EXERCICE 22. Démontrez que la relation binaire d'inclusion $\subseteq$ définie sur l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des parties d'un ensemble X est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ou partiel ?

EXERCICE 23. † On définit la relation de divisibilité $|$ sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$a \mid b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} \ \ ac = b.$$

(1) Démontrez qu'il s'agit d'une relation d'ordre partiel.

(2) Vérifiez que 0 est le plus grand élément pour cette relation.

(3) Existe-t-il un plus petit élément ?

On restreint à présent cette relation à l'ensemble $\mathbb{N} \backslash \{0, 1\}$.

(4) Existe-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ?

(5) Quels sont alors les éléments minimaux, maximaux s'il en existe ?

(6) Tracez le diagramme de Hasse de la relation de divisibilité restreinte à l'ensemble $[1, 15]$.