**Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique UE-12.**

TD 3. Calcul booléen [1]

**EXERCICE 1.** Écrivez la négation des formules suivantes :

**(1)** $F_1 := \overline{x}\,\overline{y} + x\,y + \overline{x}\,y$

**(2)** $F_2 := x\,(\overline{y}\,\overline{z} + y\,z) + \overline{x}\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,z$

**(3)** $F_3 := x\,\overline{y} + t\,\overline{z} + x\,y + \bar{t}\,z$

**(4)** $F_4 := (x + y)(\overline{x} + z)$

**(5)** $F_5 := (\overline{x}\,\overline{z} + y\,\overline{z})(x + y\,\overline{z})$

**EXERCICE 2.** Démontrez que l'opérateur binaire *non et*, dit d'*incompatibilité*, noté $\uparrow$ et défini par

$$x \uparrow y = \overline{(x.y)}$$

est un *opérateur universel*, c'est-à-dire que l'on peut définir les trois opérateurs *non*, *ou* et *et* par des combinaisons de cet opérateur. Indication : vérifiez que $\overline{x} = x \uparrow x$. Montrez que l'opérateur *non ou* $\downarrow$ est lui aussi universel.

**EXERCICE 3.** Démontrez les propriétés de *redondance* et de *simplification* puis écrivez leurs duales :

**(1)** $\forall (a, x, y) \in \mathscr{B}^3, \quad ax + \overline{a}y = ax + \overline{a}y + xy.$

**(2)** $\forall (a, b) \in \mathscr{B}^2, \qquad a + \overline{a}\,b = a + b.$

**EXERCICE 4.** Soit $x, y, z$ et $t$ quatre variables booléennes. Vérifiez les égalités suivantes :

**(1)** $xy + xzt + \overline{y}t = xy + \overline{y}t$

**(2)** $(\overline{x} + y)(x + z)(y + z) = (\overline{x} + y)(x + z)$

**(3)** $xy + \overline{y}\,z = (x + \overline{y})(y + z)$

**(4)** $\overline{x\,\overline{y} + \overline{x}\,y} = xy + \overline{x}\,\overline{y}$

**(5)** $\overline{(x + y)(\overline{x} + z)} = (x + \overline{y})(\overline{x} + \overline{z})$

1. version du 5 septembre 2024 [09:15]

**EXERCICE 5.** On considère les connecteurs logiques $\oplus$, $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\uparrow$, $\downarrow$ et $\Rrightarrow$.

**(1)** Définissez les fonctions booléennes associées à chacun de ces connecteurs à l'aide des opérations d'addition, de multiplication et de négation de l'algèbre de Boole.

**(2)** Écrivez une fonction *Python* qui code la fonction booléenne associée à l'opérateur $\Rrightarrow$.

**EXERCICE 6.** Simplifiez les fonctions booléennes suivantes puis calculez leurs formes duales :

(1) $f(x, y) := \overline{x}\,(y + 1) + y.$

(2) $f(x, y, z) := (1 + x)\,(x\overline{y} + z).$

(3) $f(x, y, z) := x(\overline{y} + 1) + \overline{x}\,z.$

(4) $f(x, y, z) := (1 + x\,y)\,z + x.$

**EXERCICE 7.** Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$. Démontrez les lois de De Morgan généralisées à l'aide d'une démonstration par récurrence finie :

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{B}^n \quad \overline{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)} = \overline{x}_1\,\overline{x}_2 \cdots \overline{x}_n \qquad (1)$$

$$\forall (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathscr{B}^n \quad \overline{(x_1\,x_2 \cdots x_n)} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \cdots + \overline{x}_n \qquad (2)$$

**EXERCICE 8.** Quelles sont les formes normales canoniques conjonctives et disjonctives des fonctions suivantes ?

(1) $f_1(x, y) := \overline{x} + x\,y$

(2) $f_2(x, y, z) := \overline{x} + x\,(y + \overline{z})$

(3) $f_3(x, y) := x$

(4) $f_4(x) := 1$

**EXERCICE 9.** Simplifiez si possible les fonctions booléennes suivantes puis dessinez les circuits logiques qui les réalisent :

– $f_1(x, y) := (\overline{x} + \overline{y})\,x + x\,\overline{y}$

– $f_2(x, y, z) := z\,(\overline{x} + \overline{y})x + x\,\overline{z}\,y$

– $f_3(x, y, z) := (x + \overline{y} + z)\,\overline{x}$

**EXERCICE 10.** † On considère le script suivant en Python :

```
n = int(input("Entrez un entier: "))
R = 0
while (R < 2**n):
    R = R + 1
```

On observe la variable `R` juste avant l'entrée dans la boucle et après la sortie de la boucle. Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Démontrez que le $k$-ème bit de `R` aura été modifié $2^{n-k}$ fois en supposant que $k = 0$ est la position du bit de poids faible.

**EXERCICE 11.** On considère la fonction booléenne $f$ de 4 variables $x, y, z$ et $t$ dont la table de Karnaugh est présentée en table (1).

| $xy$ \ $zt$ | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | | | 1 | 1 |
| 01 | | | 1 | 1 |
| 11 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 10 | | | 1 | 1 |

Table 1. Table de Karnaugh.

Donnez la forme normale disjonctive canonique de la fonction $f$ et simplifiez son expression. Dessinez le circuit logique correspondant avec les trois portes usuelles.

**EXERCICE 12.** On considère le circuit électrique suivant comportant plusieurs interrupteurs. Les conventions sont les suivantes : un interrupteur $\sigma$ est modélisé par un booléen dont les valeurs codent deux états :

(1) *ouvert* quand $\sigma = 0$ : il ne laisse pas circuler le courant.

(2) *fermé* quand $\sigma = 1$ : il laisse circuler le courant.

Quand deux interrupteurs sont dénotés par le même littéral, ils sont dans le même état, et dans l'état contraire si les littéraux sont opposés. On suppose que l'entrée $E$ est alimentée.

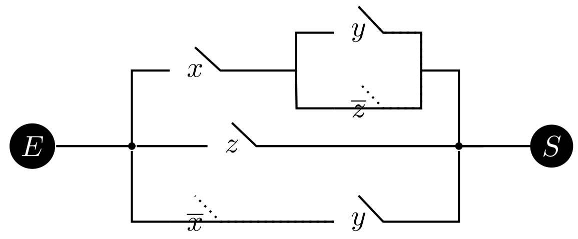


Figure 1. Circuit électrique.

Écrivez la fonction booléenne $S(x, y, z)$ qui modélise s'il y a du courant ou pas en sortie $S$ du circuit, on supposera que la valeur 1 indique la présence du courant. Simplifiez cette fonction et dessinez le circuit simplifié puis calculez sa table de vérité et donnez ses formes normales canoniques.

**EXERCICE 13.** On veut modéliser le fonctionnement d'une machine à café qui distribue du café, du thé ou du lait en appuyant sur le bouton correspondant après qu'une pièce de 1€ a été introduite. Il est possible d'obtenir un café au lait ou un thé au lait en appuyant simultanément sur les deux boutons correspondant. Si l'opérateur appuie simultanément sur café et thé, la pièce est restituée.

On considère les 4 variables booléennes $t, c, l$ et $p$ qui codent les propositions suivantes :

— $c = 1$ si et seulement si le bouton *café* est enfoncé.

— $t = 1$ si et seulement si le bouton *thé* est enfoncé.

— $l = 1$ si et seulement si le bouton *lait* est enfoncé.

— $p = 1$ si et seulement si une *pièce* de 1€ a été introduite.

Trouvez les expressions des fonctions booléennes $C$, $T$, $L$ et $P$ de ces 4 variables et qui formalisent respectivement la distribution d'un café, d'un thé, du lait et la restitution de la pièce de monnaie.

**EXERCICE 14.** † On considère la suite binaire $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_{n+2} := u_{n+1} \oplus u_n. \quad (1)$$

avec les valeurs initiales $(u_0, u_1)$.

**(1)** Trouvez les 10 valeurs suivantes de cette suite avec les valeurs initiales $(0, 1)$. Constatez que cette suite partielle est *périodique*, c'est-à-dire

$$\exists p \in \mathbb{N} \backslash \{0\} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = u_n. \tag{2}$$

où $p$ est une *période* que vous déterminerez.

**(2)** Même question avec les valeurs initiales $(1, 0)$ et $(1, 1)$.

**(3)** Démontrez la proposition (2).

**(4)** On considère la suite binaire $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_{n+4} := u_{n+2} \oplus u_n.$$

avec les valeurs initiales $(u_0, u_1, u_2, u_3)$.

**(5)** Trouvez les valeurs suivantes de cette suite avec les valeurs initiales $(1, 1, 0, 1)$. Constatez qu'elle est périodique et déterminez sa période.

**(6)** Même question avec les valeurs initiales $(1, 0, 1, 0)$ et $(1, 1, 1, 1)$.

**(7)** Démontrez que quelles que soient les valeurs initiales, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est périodique et que sa période est au plus 6.

**EXERCICE 15.** † On dispose d'un disque rotatif codant 8 directions, Nord, Nord-Ouest, Ouest, Sud-Ouest, Sud, Sud-Est, Est, Nord-Est à l'aide d'un code de Gray de dimension 3. Par convention on suppose que le triplet nul $(0, 0, 0)$ code le Nord. Soit $f$ la fonction booléenne à trois variables $x, y$ et $z$ qui vaut 1 quand la direction est le Nord, le Sud-Ouest ou le Sud-Est ($x$ désigne le bit de poids fort du code et $z$ le bit de poids faible).

**(1)** Construisez la table de Karnaugh de cette fonction et écrivez la forme normale disjonctive canonique de cette fonction.

**(2)** Simplifiez la fonction et élaborez un circuit logique pour la boussole qui allume une diode si la direction est le Nord, le Sud-Ouest ou le Sud-Est.