Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique UE-12.

TD 2. Ensembles, logique des prédicats [1]

EXERCICE 1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

$$\begin{array}{ccc} \{\varnothing\} = \varnothing, & \varnothing \subseteq \{\varnothing\}, & \varnothing \in \{\varnothing\}, \\ \{a,b\} = \{b,a\}, & \{a,a,b\} = \{a,b,b\}, & \{a,b\} \subseteq \{\{a,b\},\{a\},a\}, \\ \{a\} \in \{a,b\}, & a \subseteq \{a,b\}, & \{a,b\} \in \{\{a,b\},\{a\},a\}, \\ \{a,b\} = \{a,\{b\}\}, & \varnothing \in \varnothing, & \{\varnothing,a\} \subseteq \{a\}. \end{array}$$

EXERCICE 2. Indiquez si les énoncés suivants sont des propositions ou des prédicats et dans ce dernier cas précisez la ou les variable(s).

$$\begin{array}{ll} \exists y \in \mathbb{R} \;\; x^2 - y = \sqrt{2}, & \forall n \in \mathbb{Z}\; \exists k \in \mathbb{Z} \;\; (n = 2k) \vee (n = 2k+1), \\ \exists y \in \mathbb{R} \;\; (0 < x \leqslant y), & \exists k \in \mathbb{Z} \;\; x + y = k, \\ \forall x \in \mathbb{Z} \;\; x(x-1) = 2y, & \exists (x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R} \;\; x^2 - y^2 = 2. \end{array}$$

EXERCICE 3. Écrivez de manière formalisée que la réunion ensembliste est distributive sur l'intersection et réciproquement et démontrez le.

EXERCICE 4. Soit X et Y deux ensembles. Démontrez que

$$(X \cap Y = X \cup Y) \Rightarrow X = Y.$$

EXERCICE 5. Soit X et Y deux ensembles. Démontrez les équivalences :

$$X \cup Y = Y \Leftrightarrow X \subseteq Y. \tag{1}$$

$$X \cap Y = Y \Leftrightarrow Y \subseteq X. \tag{2}$$

EXERCICE 6. † Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $M_n := \{kn \mid k \in \mathbb{N},\ k > 1\}$ l'ensemble des multiples de n non-triviaux et on pose

$$M := \{0,1\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2} M_n.$$

Démontrez que $\mathbb{N} \backslash M$ est l'ensemble de tous les nombres premiers $\mathscr{P}$. On rappelle qu'un nombre entier est premier si et seulement s'il admet *exactement* deux diviseurs.

1. version du 5 septembre 2024 [09:14]

EXERCICE 7. Écrivez les ensembles $\mathscr{P}(\{0\})$ et $\mathscr{P}(\{a,b\})$ en extension.

EXERCICE 8. Quel axiome de la théorie des ensembles justifie l'existence de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 2\}$?

EXERCICE 9. Soit X et Y deux ensembles, $P(x)$, $Q(x)$ et $R(x)$ des prédicats. Écrivez la négation des propositions suivantes :

(1) $\forall x \in X \;\; P(x) \Rightarrow Q(x)$

(2) $\exists x \in X \;\; P(x) \Rightarrow Q(x)$

(3) $\exists x \in X \;\; P(x) \Leftrightarrow Q(x)$

(4) $\forall x \in X \;\; \neg P(x) \wedge Q(x)$

(5) $\forall x \in X \;\; P(x) \vee \neg Q(x)$

(6) $\exists x \in X \;\; \neg P(x) \oplus Q(x)$

(7) $\forall x \in X\; \exists y \in Y \;\; P(x) \Rightarrow (\neg Q(x) \wedge R(y))$

(8) $\exists x \in X\; \forall y \in Y \;\; P(x) \vee \neg Q(x,y)$

EXERCICE 10. Traduisez la proposition suivante sans utiliser le quantificateur existentiel $\exists!$, puis écrire sa négation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; \exists! k \in N \;\; (n = 2k) \vee (n = 2k+1).$$

EXERCICE 11. La continuité simple d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en tout point x s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R}\; \boxed{\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0}\;\; \forall y \in \mathbb{R} \;\; |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Alors que la continuité uniforme s'écrit

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0}\; \forall x \in \mathbb{R} \;\; \forall y \in \mathbb{R} \;\; |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Écrivez la négation de ces deux propositions.

EXERCICE 12. † On rappelle que $(x,y) := \{\{x\},\{x,y\}\}$. Démontrez que

$$(x,y) = (x',y') \Rightarrow (x = x') \wedge (y = y').$$

EXERCICE 13. Traduisez les énoncés suivants exprimés en français en logique des prédicats puis donnez leur négation.

(1) f est l'application identité du plan réel dans lui-même.

(2) f est une application de l'ensemble des nombres réels dans lui-même qui admet un point fixe.

(3) f est une application constante de l'ensemble des réels dans lui-même.

(4) f est une application de l'ensemble des réels dans lui-même et l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

(5) f et g sont des applications de l'ensemble des réels dans lui-même et f n'est pas inférieure à g.

(6) f est une application *paire* de l'ensemble des réels dans lui-même.

(7) f est une application strictement décroissante de l'ensemble des entiers naturels dans l'ensemble des réels.

(8) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée.

(9) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle croissante.

(10) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle constante à partir d'un certain rang.

(11) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle périodique.

(12) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle ultimement périodique.

EXERCICE 14. Formalisez les propositions suivantes en logique des prédicats puis écrivez la négation de ces propositions :

(1) "Tous les étudiants habitant Hyères et qui mesurent moins de 1,70m auront deux enfants ou prendront leur retraite avant 50 ans."

(2) "Tout triangle rectangle possède un angle droit".

(3) "Dans toutes les licences d'informatique il y a des étudiants bons en maths".

EXERCICE 15. On cherche à placer 8 reines sur un échiquier sans les mettre en échec conformément aux règles du jeu d'échecs. Par conséquent, deux reines ne doivent partager ni la même rangée, ni la même colonne, ni une même diagonale (vous trouverez une solution en table 1). En vous inspirant de la formalisation du Sudoku vue en cours, formalisez le problème des huit reines en logique des prédicats.

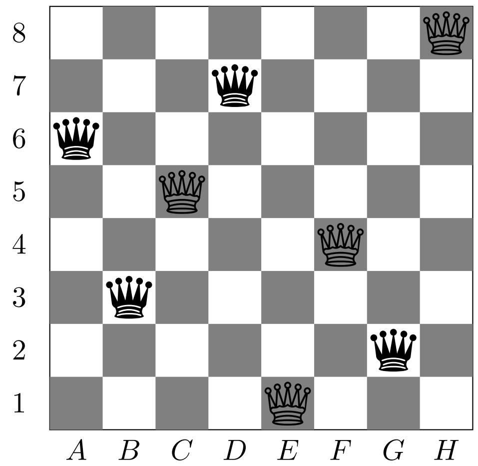

Table 1. Une solution au problème des 8 reines.