

## Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique UE-22.

### TD 5. Combinatoire<sup>1</sup>

**EXERCICE 1.** Démontrez qu'un ensemble naturel  $\mathcal{N}$  est totalement ordonné.

**EXERCICE 2.** Considérons  $X := \{\upsilon, \zeta, \tau\}$  (*upsilon*, *zêta* et *tau*) muni de l'ordre alphabétique grec et  $Y := \{z, t, u\}$  muni de l'ordre alphabétique latin. Démontrez qu'il existe une unique bijection croissante entre  $X$  et  $Y$  et que sa bijection réciproque est croissante elle aussi.

**EXERCICE 3.** Inspirez vous de la construction d'un successeur pour définir le prédécesseur  $\text{pred}(n)$  d'un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ . Indication : construisez un segment auquel vous appliquerez la deuxième propriété d'un ensemble naturel.

**EXERCICE 4.** † Démontrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \text{pred}(\text{succ}(n)) = n. \quad (1)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{succ}(\text{pred}(n)) = n. \quad (2)$$

**EXERCICE 5.** † Démontrez que l'application  $\text{succ} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*$  est une bijection croissante. En déduire que l'ensemble  $\mathbb{N}^*$  est un ensemble naturel.

**EXERCICE 6.** Démontrez que l'ensemble des entiers naturels muni de l'ordre naturel est archimédien. Indication : considérez l'ensemble  $\{ka \mid k \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq k \wedge a \leq b\}$ .

**EXERCICE 7.** Soit  $X$  un ensemble fini. Explicitez ce qui permet d'écrire que  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  (qui est un abus de langage pour  $\{x_i \mid i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ ). Même question si  $X$  est un ensemble dénombrable pour l'écriture  $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ .

**EXERCICE 8.** ‡ Soit  $n$  et  $m$  deux entiers naturels et  $f : \mathbb{N}_n \rightarrow \mathbb{N}_m$  une application. Démontrez que

(1) Si  $f$  est une injection alors  $n \leq m$ .

(2) Si  $f$  est une surjection alors  $m \leq n$ .

(3) Si  $f$  est une bijection alors  $n = m$ .

**EXERCICE 9.** Soit  $n$  un entier naturel. Démontrez par récurrence que

$$\sum_{k=0}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (3)$$

**EXERCICE 10.** Soit  $n$  un entier naturel. Démontrez par récurrence que

$$\left(\sum_{k=0}^n k\right)^2 = \sum_{k=0}^n k^3. \quad (4)$$

**EXERCICE 11.** Soit  $n$  un entier naturel. Démontrez que la somme des  $n$  premiers nombres entiers impairs est égale à  $n^2$ . Formalisez la question au préalable.

**EXERCICE 12.** † Démontrez que le quotient d'un entier naturel impair et d'un entier naturel pair n'est jamais un nombre entier.

**EXERCICE 13.** ‡ Soit  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ . On définit la suite réelle  $(H_n)_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}}$  par

$$H_n := \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Démontrez par récurrence que pour  $n \geq 2$ ,  $H_n$  n'est pas un entier naturel. Indication : montrez que  $H_n$  est une fraction avec un numérateur impair et un dénominateur pair en distinguant le cas où  $n$  est pair et  $n$  est impair (dans ce dernier cas, séparez les termes de la somme en deux groupes, ceux avec un dénominateur pair et ceux avec un dénominateur impair.)

**EXERCICE 14.** Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel  $n$ , le nombre  $3^{2n} - 1$  est divisible par 8.

**EXERCICE 15.** Démontrez la proposition suivante par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\} \quad 3^n + 4^n \leq 5^n.$$

1. version du 3 février 2025 [08:48]

**EXERCICE 16.** Une *grille* du loto est constituée de 6 numéros tous distincts choisis entre 1 et 49. Combien existe-t-il de grilles différentes ?

**EXERCICE 17.** La carte d'un restaurant propose 3 entrées, 4 plats et 4 desserts. (1) Combien de menus différents constitués d'une entrée suivie d'un plat puis d'un dessert (menu *complet*) peut-on constituer ?

(2) Même question si le menu peut-être incomplet ?

**EXERCICE 18.** Combien peut-on constituer de numéros de téléphone de 8 chiffres ne contenant pas 0 ?

**EXERCICE 19.** † Un QCM contient 20 questions comportant chacune 4 choix. Combien de QCM différents peut-on produire en mélangeant les questions et les 4 réponses à l'intérieur de chaque question ?

**EXERCICE 20.** Le jeu du *Super Mastermind* se joue à deux. L'un des joueurs crée une *combinaison secrète* en insérant ou non une punaise colorée sur chacun des 5 trous d'une rangée d'un tableau cachée par un paravent à l'autre joueur. Il y a 8 couleurs différentes. (voir fig 1). Il est donc possible de laisser les 5 trous vides ou encore de placer 5 pions de la même couleur. L'autre joueur, en face, doit deviner cette séquence en plaçant sa solution en vis-à-vis.

(1) Combien existe-t-il de combinaisons secrètes au *Mastermind* ?

(2) Même question si le joueur laisse deux positions vides ?

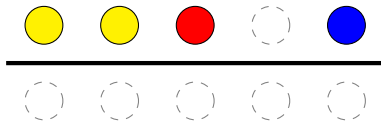


FIGURE 1. Combinaison secrète du *Super Mastermind* : deux pions jaunes, un rouge, une case vide et un pion bleu.

**EXERCICE 21.** Un code de carte bancaire contient 4 chiffres décimaux.

(1) Combien peut-on constituer de codes différents ?

(2) Même question si les 4 chiffres sont différents ?

(3) Même question si deux chiffres au moins sont identiques ?

**EXERCICE 22.** (1) Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot *maths* (ces anagrammes sont quelconques, pas nécessairement des mots de la langue française) ?

(2) Combien y-a-t-il d'anagrammes *distinctes* du mot *arbre* ?

**EXERCICE 23.** Une *adresse* IP est constituée de 4 nombres non-nuls de 8 bits.

(1) Combien existe-t-il d'adresses IP distinctes ?

(2) Même question si les 4 nombres sont tous différents ?

(3) Même question s'il faut au plus 16 bits nuls ?

**EXERCICE 24.** La classe de I23 comporte  $f \geq 4$  filles et  $g \geq 4$  garçons. On veut élire 4 représentants de la classe. Combien peut-on constituer de groupes différents de :

(1) 4 filles ?

(2) 4 étudiant-e-s ?

(3) 4 étudiant-e-s de même sexe ?

(4) 4 étudiant-e-s contenant au moins une fille et au moins un garçon ?

**EXERCICE 25.** † On constitue une *main* avec 5 cartes d'un jeu de 32 cartes contenant 8 cartes pour chacune des 4 couleurs : *trèfle* ♣, *carreau* ♦, *cœur* ♥ et *pique* ♠. Combien peut-on constituer de mains différentes ? Combien peut-on constituer de mains différentes contenant *exactement* :

(1) une quinte flush (5 valeurs consécutives de même couleur) ?

(2) une quinte (5 valeurs consécutives pas de même couleur) ?

(3) un carré (4 cartes de même valeur) ?

(4) une paire (2 cartes de même valeur) ?

(5) deux paires de valeurs différentes ?

(6) une couleur ? (5 cartes de valeurs différentes mais de même couleur) ?

(7) un brelan (3 cartes de même valeur uniquement) ?

(8) un full (un brelan et une paire) ?

**EXERCICE 26.** † Quatre pigeons et 2 moineaux se posent côte à côte sur un cable. On suppose que l'on ne peut pas différencier les pigeons entre eux ni les moineaux.

- (1) Combien y-a-t-il de dispositions possibles ?
- (2) Même question avec les pigeons d'un côté et les moineaux de l'autre ?
- (3) Même question si chaque moineau est entre deux pigeons ?
- (4) Même question si les moineaux sont côte à côte ?

**EXERCICE 27.** Démontrez que le nombre de  $p$ -uplets strictement ordonnés d'un ensemble totalement ordonné  $X$  à  $n$  éléments est égal à  $\binom{n}{p}$ , le nombre de [parties à  \$p\$  éléments](#) d'un ensemble à  $n$  éléments.

**EXERCICE 28.** Formalisez et démontrez le *principe des tiroirs* : si  $n$  caleçons sont rangés dans  $m$  tiroirs (peu importe dans quel ordre) avec  $n > m$ , un tiroir contient au moins 2 caleçons.

**EXERCICE 29.** De combien de façons différentes peut-on empiler 8 tee-shirts sur une étagère ?

**EXERCICE 30.** † Démontrez que le nombre de rectangles que l'on peut tracer sur un quadrillage de  $\ell$  lignes et  $c$  colonnes est égal à

$$\frac{\ell(\ell - 1)c(c - 1)}{4}. \quad (5)$$

**EXERCICE 31.** Soit  $p$  et  $n$  deux entiers tels que  $0 \leq p \leq n$ . Démontrez les identités suivantes :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \quad \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

**EXERCICE 32.** Pourquoi le [triangle de Pascal](#) permet-il de calculer plus efficacement des [coefficients binomiaux](#) qu'en calculant le quotient de la formule ci-dessous ?

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

**EXERCICE 33.** Soit  $n$  un entier naturel.

- (1) Quels sont les coefficients du polynôme  $(X + 1)^n$  ?
- (2) Développez l'expression  $(x - y)^6$ .

**EXERCICE 34.** Soit  $p$  et  $n$  deux entiers tels que  $0 \leq p \leq n$ .

(1) Démontrez que si  $p \geq 1$  alors on a l'égalité suivante, appelée *formule du pion* :

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

(2) Puis en déduire que

$$\sum_{p=1}^n p \binom{n}{p} = n2^{n-1}.$$

**EXERCICE 35.** † On considère la fonction  $P(X) := (X^{n+1} - 1)/(X - 1)$ .

(1) Soit  $Q(X) := 1 + X + X^2 + \dots + X^{n-1} + X^n$ . Vérifiez que  $Q(X) = P(X)$  pour  $X \neq 1$ . Indication : multipliez  $Q(X)$  par  $X$  et retrouvez  $Q(X)$  dans cette nouvelle expression.

(2) Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . En calculant le polynôme dérivé  $P'(X)$  de deux façons différentes, calculez la somme

$$S := \sum_{k=1}^n kq^k. \quad (6)$$