

Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique UE-22. Contrôle

Terminal - Session 2 (correction) - Juin 2026

Problème. Le jeu « pierre/feuille/ciseaux » oppose deux joueurs qui choisissent chacun l'une de ces trois armes matérialisées avec la main par $p := \text{✊}$, $f := \text{✋}$ et $c := \text{✂}$ respectivement. Les adversaires cachent cette main dans leur dos et la dévoilent au même moment. La règle pour décider du vainqueur du duel est la suivante :

- la pierre casse les ciseaux et gagne ;
- la feuille enveloppe la pierre et gagne ;
- les ciseaux coupent la feuille et gagnent.

Si les deux joueurs utilisent la même arme, il y a match nul.

On modélise un duel par un magma constitué de l'ensemble des armes

$$\mathcal{A} := \{p, f, c\}$$

muni de la loi de composition interne \dagger définie par l'arme victorieuse lors d'un duel.

- 1 » Construisez la table de Cayley du magma (\mathcal{A}, \dagger) .
- 2 » Le magma est-il unifié ? commutatif ? associatif ? symétrisable ?
Un tournoi de n joueurs numérotés de 1 à n est organisé. Chaque joueur choisit son arme indépendamment dans \mathcal{A} .
- 3 » Combien y a-t-il de distributions possibles des armes chez ces joueurs ?
- 4 » Combien y a-t-il de distributions contenant exactement k pierres ?
- 5 » Combien y a-t-il de distributions où chaque arme apparaît au moins une fois ?
- 6 » Deux joueurs choisissent leur arme au « hasard ». Proposez un modèle probabiliste en définissant l'univers Ω , la tribu \mathcal{F} et la loi de probabilité \mathbb{P} , puis calculez la probabilité d'un match nul en définissant cet événement dans le cadre de votre modèle.
- 7 » Le tournoi se fait par élimination directe : un joueur qui perd son duel est éliminé du tournoi. Calculez la probabilité que le vainqueur du tournoi soit déclaré après $n - 1$ duels.
- 8 » On note X le nombre de matchs nuls obtenus en n duels. Identifiez la loi de X , puis donnez son espérance et sa variance.

Réponse.

1 » On obtient :

\dagger	p	f	c
p	p	f	p
f	f	f	c
c	p	c	c

2 » Le magma n'est pas unifié car aucune ligne ni aucune colonne n'est égale à p, f, c . Le magma est en revanche commutatif par construction puisque le vainqueur d'un duel ne dépend pas de l'ordre des joueurs. Le magma n'est pas associatif. Par exemple :

$$(p \dagger f) \dagger c = f \dagger c = c,$$

alors que

$$p \dagger (f \dagger c) = p \dagger c = p.$$

Le magma n'est pas symétrisable car il n'existe pas d'élément neutre.

3 » Les différents choix des armes pour les n joueurs sont en bijection avec l'ensemble \mathcal{A}^n des n -uplets d'armes dont le cardinal est

$$3^n.$$

Il y a donc autant de distributions possibles.

4 » Il faut choisir les k joueurs utilisant la pierre parmi les n joueurs, puis fixer librement une arme à chacun des $n - k$ joueurs restants :

$$\binom{n}{k} 2^{n-k}.$$

5 » On peut procéder par complémentation en retirant le nombre de n -uplets de \mathcal{A}^n ne contenant qu'une ou deux armes. Le choix d'une arme pour chaque joueur dans une paire d'armes $\{a, b\}$ définit un n -uplet de $\{a, b\}^n$ et réciproquement, l'ensemble de ces choix est donc en bijection avec $\{a, b\}^n$ dont le cardinal est 2^n . Cependant parmi ces 2^n choix, il y a les deux choix (a, \dots, a) et (b, \dots, b) associés à une seule arme. En réunissant les ensembles de n -uplets correspondant aux trois paires d'armes possibles $\bar{c} := \{p, f\}^n$, $\bar{f} := \{p, c\}^n$ et $\bar{p} := \{f, c\}^n$, on obtient tous les n -uplets possibles contenant au plus deux armes, mais ces trois ensembles

ne sont pas deux-à-deux disjoints, on ne peut donc pas utiliser directement la formule de sommation :

$$\bar{c} \cap \bar{f} = \{(p, \dots, p)\}$$

$$\bar{c} \cap \bar{p} = \{(f, \dots, f)\}$$

$$\bar{p} \cap \bar{f} = \{(c, \dots, c)\}$$

On en déduit le nombre grâce au principe d'inclusion/exclusion :

$$3^n - 3 \times 2^n + 3.$$

6 » On modélise l'expérience aléatoire par l'univers $\Omega := \mathcal{A}^2$ des couples d'armes, la première projection x (resp. deuxième projection y) d'un couple (x, y) désignant l'arme choisie par le premier (resp. deuxième) joueur. L'univers étant fini, on peut choisir la tribu discrète $\mathcal{F} := \mathcal{P}(\Omega)$. Les deux joueurs choisissant leur arme indépendamment et uniformément, chaque issue possède la probabilité

$$\frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}.$$

Ainsi, pour tout événement $A \subseteq \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{9}.$$

L'événement N , « l'issue du duel est nulle » est donné par

$$N = \{(p, p), (f, f), (c, c)\}.$$

Comme $|N| = 3$, on obtient

$$\mathbb{P}(N) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}.$$

7 » Pour que le tournoi se termine après exactement $n-1$ duels, aucun duel ne doit être nul. Or un duel est décisif avec probabilité

$$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}.$$

Les $n-1$ duels doivent donc être décisifs :

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

8 » Chaque duel est une épreuve de Bernoulli indépendante dont le succès est l'événement « l'issue du duel est nulle », de probabilité

$$p = \frac{1}{3}.$$

Ainsi, X suit la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{3}$:

$$X \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{3}).$$

Pour tout entier $k \in [0, n]$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}.$$

Son espérance vaut

$$\mathbb{E}(X) = \frac{n}{3},$$

et sa variance vaut

$$\text{Var}(X) = \frac{2n}{9}.$$

Exercice. Soit n un entier naturel.

1 » Montrez par récurrence que $n(n+1)(n+2)$ est un multiple de 6.

2 » Montrez que si $(n, 5) = 1$, alors $5 \mid n^4 - 1$.

3 » En déduire que pour tout entier naturel n , le nombre $p(n) := n(n^4 - 1)$ est divisible par 30. Indication : factorisez $p(n)$.

Réponse.

1 » On considère le prédicat $P(n)$ suivant : « $6 \mid n(n+1)(n+2)$ ».

Initialisation : comme $6 \mid 0$, la proposition $P(0)$ est vraie.

Hérédité : montrons que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. On a :

$$(n+1)(n+2)(n+3) = n(n+1)(n+2) + 3(n+1)(n+2)$$

Par hypothèse de récurrence, le premier terme est divisible par 6. De plus, parmi deux entiers consécutifs, l'un est pair, donc $(n+1)(n+2)$ est divisible par 2, et ainsi $3(n+1)(n+2)$ est divisible par 6.

2 » Puisque 5 est premier et qu'on suppose que $(n, 5) = 1$, on peut appliquer le petit théorème de Fermat : $n^{5-1} \equiv 1 \pmod{5}$ et donc

$$n^4 - 1 \equiv 0 \pmod{5} \Leftrightarrow 5 \mid n^4 - 1.$$

3 » On a

$$\begin{aligned} p(n) &= n(n^4 - 1) \\ &= n(n^2 - 1)(n^2 + 1) \\ &= (n - 1)n(n + 1)(n^2 + 1) \end{aligned}$$

On sait d'après la première question que $p(n)$ est divisible par 6, il est donc divisible par 2 et 3. D'autre part, $p(n)$ est toujours un multiple de 5, soit parce que n est un multiple de 5, soit parce que $5 \mid n^4 - 1$ d'après la question 2. Comme 2, 3 et 5 sont premiers entre eux et divisent $p(n)$, leur produit 30 divise $p(n)$ d'après le corollaire du lemme de Gauss.