**Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique UE-22.**

Contrôle Terminal - Session 2 (correction) - Juin 2025

**Problème.** Un entier naturel $n$ est appelé $b$-palindrome si la séquence de ses chiffres dans son écriture en base $b$ est la même de gauche à droite ou de droite à gauche. On note $|n|_b$ le nombre de chiffres d'un entier naturel $n$ dans son écriture en base $b$ et $\mathbb{N}(b,k)$ le sous-ensemble des entiers naturels dont l'écriture en base $b$ contient $k$ chiffres et $P(b)$ l'ensemble des $b$-palindromes.

Exemples : l'entier $n$ dont l'écriture est 202 en base 10 et 11001010 en base 2 est un 10-palindrome mais pas un 2-palindrome. En revanche, l'entier $n$ dont l'écriture est 99 en base 10 et 1100011 en base 2 est à la fois un 10-palindrome et un 2-palindrome.

**(1)** [1.0] Exprimez formellement $\mathbb{N}(b,k)$. Calculez le cardinal $\#\mathbb{N}(10,3)$.

**(2)** [2.5] Plus généralement, calculez $\mathbb{N}(b,k)$ et $\mathbb{N}(b,k) \cap P(b)$. En déduire la probabilité qu'un entier à 3 chiffres décimaux soit un 10-palindrome.

**(3)** [1.0] Écrivez l'ensemble $\mathbb{N}(10,1) \cap P(10) \cap P(2)$ en extension.

**(4)** [2.0] À l'aide de la fonction Python prédéfinie `Palindrome(n,b)` qui renvoie la valeur de vérité de la proposition « $n$ est un $b$-palindrome », écrivez une fonction Python `DeuxDix(a,b)` qui renvoie la liste de tous les entiers $n \in [\![a,b]\!]$ qui sont simultanément des 2-palindromes et des 10-palindromes.

**(5)** [1.0] Quelle est la liste renvoyée par l'appel `>>>DeuxDix(1,9)` ?

**(6)** [1.0] Soit $n_{\ell-1}, n_{\ell-2}, \ldots, n_1, n_0$ les $\ell$ chiffres de l'écriture décimale d'un entier naturel $n$, i.e.

$$n = \sum_{i=0}^{\ell-1} n_i 10^i.$$

Calculez l'image de $n$ par la surjection canonique $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Indication : calculez le reste de la division euclidienne de $10^i$ pour $i$ impair et pour $i$ pair en remarquant que $10 \equiv -1 \pmod{11}$.

**(7)** [2.0] Démontrez que les 10-palindromes de longueur paire sont tous des multiples de 11.

**Réponse. (1)** L'ensemble $\mathbb{N}(b,k)$ contient les entiers naturels dont l'écriture en base $b$ possède exactement $k$ chiffres, on a donc

$$\mathbb{N}(b,k) = \{n \in \mathbb{N} \quad |n|_b = k\}.$$

Les nombres décimaux à 3 chiffres sont compris entre 100 et 999, il y a en a donc $999 - 100 + 1$. En effet, on rappelle que

$$\#[\![a,b]\!] = b - a + 1. \tag{1}$$

**(2)** Par définition de l'écriture positionnelle, on sait que

$$b^k = 1\underbrace{0\ldots0}_{k} \quad \text{et} \quad b^k - 1 = \underbrace{\omega\ldots\omega}_{k}$$

si 0, 1 et $\omega$ désignent respectivement les deux premiers chiffres et le dernier chiffre de la base $b$ condidérée ($\omega = 9$ en base dix). On a donc :

$$\mathbb{N}(b,k) = \left\{n \in \mathbb{N} \,|\, b^{k-1} \leqslant n < b^k\right\} \tag{2}$$
$$= [\![b^{k-1}, b^k - 1]\!] \tag{3}$$

D'après (3) et (1), on déduit immédiatement que

$$\#\mathbb{N}(b,k) = (b^k - 1) - b^{k-1} + 1 = b^{k-1}(b-1)$$

Un entier de $\mathbb{N}(b,k)$ est un palindrome si et seulement si sa représentation en base $b$ est symétrique. Pour former un palindrome de $k$ chiffres en base $b$, que $k$ soit pair ou non, il suffit de choisir librement les $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ premiers chiffres, la seule contrainte est que le premier chiffre (dit de poids fort) ne soit pas nul. Les chiffres restants sont imposés par la symétrie.

Ainsi, le nombre de $b$-palindromes à $k$ chiffres est :

$$\#(\mathbb{N}(b,k) \cap P(b)) = (b-1) \cdot b^{\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil - 1}$$

Dans le cas particulier $b = 10$, $k = 3$, on a :

$$\#(\mathbb{N}(10,3) \cap P(10)) = 9 \cdot 10^{\left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil - 1} = 9 \cdot 10 = 90$$

La loi de probabilité est la loi de probabilité uniforme pour l'expérience aléatoire consistant à tirer un nombre $n$ « au hasard » dans l'ensemble $\mathbb{N}(10,3)$. En notant $T$ l'évènement « *$n$ est un palindrome* », on a donc :

$$\mathbb{P}(T) = \frac{90}{900} = \frac{1}{10}$$

**(3)** Tous les entiers dont l'écriture en base $b$ est limitée à un seul chiffre sont évidemment des palindromes, donc

$$\mathbb{N}(10,1) \cap P(10) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}.$$

On vérifie pour chacun de ces 10 entiers s'il est également un palindrome en base 2 :

| | |
|---|---|
| $0 \to$ `0` ✓ | $1 \to$ `1` ✓ |
| $2 \to$ `10` ☒ | $3 \to$ `11` ✓ |
| $4 \to$ `100` ☒ | $5 \to$ `101` ✓ |
| $6 \to$ `110` ☒ | $7 \to$ `111` ✓ |
| $8 \to$ `1000` ☒ | $9 \to$ `1001` ✓ |

Ainsi :

$$\mathbb{N}(10,1) \cap P(10) \cap P(2) = \{0,1,3,5,7,9\}$$

**(4)** On suppose l'existence d'une fonction prédéfinie `Palindrome(n,b)` qui renvoie un booléen indiquant si $n$ est un palindrome en base $b$. La fonction demandée utilise l'écriture en compréhension des listes *Python* :

```
def DeuxDix(a,b):
    return [n for n in range(a, b + 1)
              if Palindrome(n,2) and Palindrome(n,10)]
```

Cette fonction parcourt les entiers de $a$ à $b$ inclus, et sélectionne ceux qui sont simultanément palindromes en base 2 et en base 10.

**(5)** L'appel `DeuxDix(1,9)` renvoie la liste des entiers de 1 à 9 qui sont palindromes en base 2 et en base 10. D'après l'analyse précédente :

```
DeuxDix(1,9) = [1, 3, 5, 7, 9]
```

**(6)** La surjection canonique $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ étant un morphisme d'anneaux, on a :

$$\varphi(n) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{\ell-1} n_i 10^i\right) = \sum_{i=0}^{\ell-1} \varphi(n_i)\varphi(10)^i.$$

Comme $\forall i \in [\![0, \ell-1]\!]\ n_i \in [\![0,9]\!]$, on a $\varphi(n_i) = n_i$. D'autre part $10 \equiv -1 \pmod{11}$, donc

$$\varphi(10)^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est pair} \\ -1 & \text{si } i \text{ est impair} \end{cases}$$

Autrement dit, on obtient $\varphi(n)$ en additionnant tous les chiffres d'indice pair et en soustrayant tous ceux d'indice impair :

$$\varphi(n) = \sum_{i=0}^{\ell-1} (-1)^i n_i. \tag{4}$$

Si la valeur obtenue est supérieure à 10 on recommence inductivement.

**(7)** Dans un 10-palindrome de longueur paire $\ell = 2k$, les chiffres de $n$ sont symétriques, i.e

$$\forall i \in [\![0, k-1]\!] \quad n_{k+i} = n_{k-(i+1)}.$$

Mais $k + 2i \equiv k \pmod 2$ donc $k + i \equiv k - i \pmod 2$. Par conséquent $k+i \not\equiv k-(i+1) \pmod 2$ et les indices de deux chiffres de $n$ symétriques sont de parité opposée, la somme alternée (4) est donc nulle modulo 11. Tout palindrome décimal de longueur paire est nécessairement divisible par 11.