Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique UE-22.

Contrôle Terminal - Session 1 (correction) - Mai 2025

Problème. Pour préparer ses élèves de maternelle à Parcoursup, Mme Toubi-Eulaïv leur fait calculer des produits $x \times y$ d'entiers naturels x et y non-nuls dont les nombres de chiffres en base 10, notés $|x|$ et $|y|$, satisfont :

$$(|x| = 1) \wedge (|y| = 2). \quad (1)$$

(1) [1.0] Démontrez que $2 \leqslant |x \times y| \leqslant 3$.

(2) [2.0] Pour que le calcul ne soit pas trop simple, elle veut de plus que

$$(x \geqslant 2) \wedge (|x \times y| = 3). \quad (2)$$

Simplifiez lui le travail en écrivant une fonction *Python* `GenererCouple()` qui renvoie un *tuple* (x, y) qui respecte les conditions (1) et (2) (la fonction `randint(a,b)` renvoie un entier n tel que $a \leqslant n \leqslant b$).

(3) [1.5] Combien de couples (x, y) différents peut générer ce script ?

On tire un couple $\omega = (x, y)$ *au hasard* dans l'ensemble $\Omega := [\![2, 9]\!] \times [\![10, 99]\!]$.

(4) [1.0] L'application $\pi : \Omega \to [\![20, 891]\!]$ définie par $\pi(x, y) = x \times y$ est-elle injective ? Surjective ?

(5) [1.0] Quelle est la loi de probabilité qui est définie sur Ω ? Calculez $\mathbb{P}(x, y)$ pour tout $(x, y) \in \Omega$.

(6) [2.0] On note $C(x, y) := |x \times y|$ la variable aléatoire correspondant au nombre de chiffres du produit $x \times y$. Calculez les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(C = 3 \mid x)$ pour tout $x \in [\![2, 9]\!]$.

(7) [2.0] En déduire $\mathbb{P}(C = 3)$ à l'aide de la loi de la probabilité totale.

(8) [1.0] Kevin a fait son calcul correctement mais, distrait par *T'choupi* sur son smartphone, il ne fait pas attention à l'ordre dans lequel il écrit les 3 chiffres du résultat. S'ils sont tous différents, quelle est la probabilité qu'il écrive la bonne valeur ? Et si deux chiffres sont identiques ?

Soit x un entier naturel à $n+1$ chiffres x_i dans sa représentation en base 10, on peut donc l'écrire

$$x = \sum_{i=0}^{n} x_i 10^i.$$

(9) [1.0] Démontrez que

$$\varphi(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i$$

où $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ désigne la surjection canonique.

(10) [0.5] Mme Toubi-Eulaïv propose aux enfants une méthode pour déceler une erreur dans leur calcul $x \times y$. Ils doivent vérifier que la somme des chiffres du résultat r qu'ils obtiennent est égale au produit de la somme des chiffres de x et de la somme des chiffres de y (si une somme est $\geqslant 10$, on somme de nouveau ses chiffres). Sur quelle propriété mathématique de φ s'appuie cet algorithme ?

(11) [1.0] Dans quel(s) cas cette méthode permettra-t-elle à Kevin de déceler une erreur s'il se trompe sur la valeur d'un chiffre du résultat ?

Réponse. (1) On déduit immédiatement de l'énoncé que

$$(1 \leqslant x \leqslant 9) \;\wedge\; (10 \leqslant y \leqslant 99).$$

et par croissance de la fonction $n \mapsto k \times n$ pour $k > 0$ dans $\mathbb{N}$:

$$(\underbrace{1 \times 10}_{10} \leqslant x \times y \leqslant \underbrace{9 \times 99}_{891}).$$

Donc $2 \leqslant |x \times y| \leqslant 3$.

(2) Voici une fonction Python qui génère un couple (x, y) respectant les conditions :

```
from random import randint

def GenererCouple():
    produit = 0
    while not(100 <= produit <= 999):
        x = randint(2, 9)
        y = randint(10, 99)
        produit = x * y
    return (x, y)
```

(3) On pose $X := [\![2, 9]\!]$ et $Y := [\![10, 99]\!]$, donc $\Omega = X \times Y$ et on sait que $|\Omega| = |X| \times |Y|$. Comme $|X| = 9 - 2 + 1 = 8$ et $|Y| = 99 - 10 + 1 = 90$, on a $|\Omega| = 8 \times 90 = 720$. Mais tous les couples $(x, y) \in \Omega$, n'ont pas un produit qui satisfait (2), le couple $(5, 15)$ par exemple dont le produit vaut $75 < 100$. En revanche on sait que leur produit fait au plus trois chiffres. Il faut donc déterminer pour chacune des 8 valeurs de x, la plus petite valeur de y pour laquelle le nombre de chiffres du produit est 3, ce qui revient à résoudre l'inéquation suivante d'inconnu $y \in Y$ pour les différentes valeurs de $x \in X$:

$$x \times y \geqslant 100 \Leftrightarrow \; y \geqslant \left\lceil \frac{100}{x} \right\rceil$$

Il suffit de calculer la division euclidienne de 100 par x et de rajouter 1 au résultat si le reste n'est pas nul, ce qui se fait rapidement [1] :

$$\begin{aligned} &(x = 2) \Rightarrow y \in [\![50, 99]\!] && (x = 6) \Rightarrow y \in [\![17, 99]\!] \\ &(x = 3) \Rightarrow y \in [\![34, 99]\!] && (x = 7) \Rightarrow y \in [\![15, 99]\!] \\ &(x = 4) \Rightarrow y \in [\![25, 99]\!] && (x = 8) \Rightarrow y \in [\![13, 99]\!] \\ &(x = 5) \Rightarrow y \in [\![20, 99]\!] && (x = 9) \Rightarrow y \in [\![12, 99]\!] \end{aligned}$$

Il suffit à présent d'additionner les cardinaux des intervalles pour trouver le nombre de couples distincts que le script peut renvoyer :

$$S := 50 + 66 + 75 + 80 + 83 + 85 + 87 + 88 = 614.$$

(4) L'application π n'est pas injective, les deux couples $(2, 50)$ et $(4, 25)$ ont la même image 100. Elle n'est pas non plus surjective, par définition aucun nombre premier à trois chiffres ne peut s'écrire comme un produit $x \times y$ avec $x \neq 1$ et $y \neq 1$ et il en existe dans l'intervalle $[\![20, 891]\!]$, par exemple 23 (NB. Il en existe 143 au total).

(5) Il s'agit de la loi de probabilité uniforme. Puisque x et y sont tirés uniformément dans $\Omega = [\![2, 9]\!] \times [\![10, 99]\!]$ et que $|\Omega| = 8 \times 90 = 720$, on a

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \mathbb{P}(x, y) = \frac{1}{720}.$$

(6) Pour tout $x \in \{2, \ldots, 9\}$, on veut calculer $\mathbb{P}(C = 3 \mid x)$, soit la probabilité que le produit $x \times y$ ait 3 chiffres, sachant la valeur de x. D'après la question (3), on connaît pour chaque valeur de x l'ensemble des valeurs de y qui correspondent à l'évènement « $|x \times y| = 3$ », on en déduit que

1. Quand on connaît ses tables de multiplication…

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(C = 3 \,|\, x = 2) = 50/90 && \mathbb{P}(C = 3 \,|\, x = 6) = 66/90 \\ &\mathbb{P}(C = 3 \,|\, x = 3) = 75/90 && \mathbb{P}(C = 3 \,|\, x = 7) = 80/90 \\ &\mathbb{P}(C = 3 \,|\, x = 4) = 83/90 && \mathbb{P}(C = 3 \,|\, x = 8) = 85/90 \\ &\mathbb{P}(C = 3 \,|\, x = 5) = 87/90 && \mathbb{P}(C = 3 \,|\, x = 9) = 88/90 \end{aligned}$$

(7) Comme x est tiré uniformément dans l'interalle $[\![2, 9]\!]$, on a $\mathbb{P}(x) = 1/8$. On applique la loi des probabilités totales :

$$\mathbb{P}(C = 3) = \frac{1}{8} \sum_{x=2}^{9} \mathbb{P}(C = 3 \mid x) = \frac{614}{720} \approx 0{,}85$$

(8) Lorsque les 3 chiffres sont tous distincts, il y a $3! = 6$ permutations possibles, une seule est correcte, donc la probabilité est $\frac{1}{6}$. S'il y a exactement deux chiffres identiques, seule la position du chiffre différent dans l'écriture de $x \times y$ intervient, il y en a 3. Une seule est correcte, donc la probabilité est de $\frac{1}{3}$.

(9) Soit $x = \sum_{i=0}^{n} x_i 10^i$. On sait quel le calcul modulo 9 revient à appliquer la surjection canonique $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$ qui est un morphisme d'anneaux, donc :

$$\varphi(x) = \varphi\left(\sum_{i=0}^{n} x_i 10^i\right) = \sum_{i=0}^{n} \varphi(x_i)\varphi(10)^i = \sum_{i=0}^{n} x_i$$

En effet, le reste de la division euclidienne de 10 par 9 est égal à 1, et le reste de la division de x_i par 9 est égal à x_i puisque $x_i \leqslant 9$, sauf si $x_i = 9$ auquel cas le reste est nul, mais $9 \equiv 0 \pmod 9$.

(10) L'algorithme repose sur le fait que la surjection canonique est un morphisme d'anneaux, par conséquent

$$x \times y = z \Rightarrow \varphi(x) \times \varphi(y) = \varphi(z).$$

(11) Modifier la valeur d'un seul chiffre modifie systématiquement la somme modulo 9, l'erreur est donc détectée, à deux exceptions près, si ce chiffre est 0 et qu'il est modifié en 9 ou réciproquement.