Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique UE-12.

Contrôle Terminal - Session 1 (correction) - Décembre 2025

NB. Les réponses sans preuve ni justification ne sont pas valables.

Exercice 1. On munit $\mathscr{B} := \{0,1\}$ de sa structure d'algèbre de Boole. On rappelle que l'on peut étendre les opérateurs du calcul booléen (addition, produit, négation, etc.) à des n-uplets binaires (opérateurs *bit à bit*) en les faisant agir sur chaque terme respectivement. Par exemple pour la négation et l'addition :

$$\overline{(x_1,\dots,x_n)} := (\overline{x_1},\dots,\overline{x_n})$$
$$(x_1,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) := (x_1+y_1,\dots,x_n+y_n)$$

Soit $X := \{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ un ensemble à n éléments et $A \in \mathscr{P}(X)$ une partie de X. On rappelle que $\mathbb{1}_A : X \to \mathscr{B}$ désigne la *fonction indicatrice* de A définie par

$$\mathbb{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On appelle *vecteur caractéristique de* A le n-uplet binaire

$$\chi(A) := (\mathbb{1}_A(x_1), \mathbb{1}_A(x_2), \dots, \mathbb{1}_A(x_n)). \tag{1}$$

1» Calculez les vecteurs caractéristiques de $\varnothing$ et X.

2» L'expression (1) définit explicitement une fonction χ. Tracez son diagramme sagittal pour $n = 3$. Plus généralement, quel est l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de χ ?

3» On considère l'ensemble suivant :

$$B := \{(b_1,\dots,b_n) \in \mathscr{B}^n \mid \exists! i \in [\![2,n]\!]\ b_i = 1\}.$$

Pour $n := 3$, calculez B et son image réciproque par χ en extension. Plus généralement pour n quelconque, calculez $\chi^{-1}(B)$ en compréhension.

4» Dans cette question uniquement on suppose que $\forall i \in [\![1,n]\!]\ x_i = i$. Définissez la partie A de X dont les éléments sont impairs en compréhension et calculez son image par χ dans le cas particulier où $n = 8$.

Dans les questions suivantes, l'entier n et l'ensemble X sont quelconques.

5» La fonction χ est-elle une application ? Si oui, est-elle injective, surjective ? Justifiez. Montrez que $|\mathrm{Def}(\chi)| = |\mathrm{Im}(\chi)|$ où $|E|$ désigne le cardinal d'un ensemble fini E.

6» Montrez que pour toutes parties A et B de X, on a

$$\chi(\overline{A}) = \overline{\chi(A)}$$
$$\chi(A \triangle B) = \chi(A) \oplus \chi(B)$$

où $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans X et $A \triangle B$ la différence symétrique de A et B.

Réponse. 1» Il suffit d'appliquer la définition :

$$\chi(\varnothing) = (\mathbb{1}_\varnothing(x_1),\dots,\mathbb{1}_\varnothing(x_n)) = (0,0,\dots,0)$$
$$\chi(X) = (\mathbb{1}_X(x_1),\dots,\mathbb{1}_X(x_n)) = (1,1,\dots,1).$$

2» La figure 1 contient le diagramme sagittal de χ pour $n = 3$.

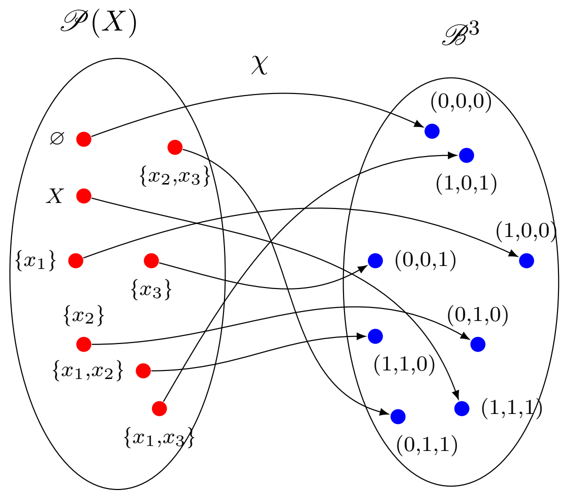

Figure 1. Diagramme sagittal de χ pou $n = 3$.

L'ensemble de départ de χ est $\mathscr{P}(X)$ et son ensemble d'arrivée est $\mathscr{B}^n$.

3» Pour $n = 3$, on a

$$B = \{(\underset{1}{0}, \underset{2}{1}, \underset{3}{0}), (1,1,0), (0,0,1), (1,0,1)\}.$$

Son image réciproque est donc

$$\chi^{-1}(B) = \{\{x_2\}, \{x_1, x_2\}, \{x_3\}, \{x_1, x_3\}\}.$$

Plus généralement, le premier bit du vecteur caractéristique est quelconque et un seul des autres bits n'est pas nul. Autrement dit, la partie A peut contenir ou non l'élément x_1 et doit contenir exactement un autre élément x_i pour $i \in [\![2, n]\!]$ de X :

$$\chi^{-1}(B) = \bigcup_{i=2}^{n} \{\{x_i\}, \{x_1, x_i\}\}.$$

4» Le sous-ensemble A de X sont les éléments sont impairs est défini en compréhension par

$$A := \{i \in X \mid \exists k \in \mathbb{N}\ i = 2k+1\}.$$

Et pour $n = 8$ on a

x_i	**1**	2	**3**	4	**5**	6	**7**	8
$\mathbb{1}_A(x_i)$	1	0	1	0	1	0	1	0

Par conséquent

$$\chi(A) = (\mathbb{1}_A(1), \ldots, \mathbb{1}_A(8)) = (1,0,1,0,1,0,1,0).$$

5» La fonction χ est bien une application puisqu'elle est définie pour toute partie $A \subseteq X$. Montrons qu'elle est injective. Supposons que A et B soient deux parties de X telles que $\chi(A) = \chi(B)$, i.e. telles que

$$\forall i \in [\![1, n]\!]\quad \mathbb{1}_A(x_i) = \mathbb{1}_B(x_i). \tag{2}$$

Il faut prouver que $A = B$, c'est-à-dire que $(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)$ d'après l'axiome d'extension. On se contente de montrer que $A \subseteq B$, il suffit d'échanger le rôle de A et B dans le raisonnement qui va suivre pour montrer que $B \subseteq A$:

Soit x_i un élément quelconque de A. Par définition de l'application χ, on a $\mathbb{1}_A(x_i) = 1$, mais on sait que $\mathbb{1}_A(x_i) = \mathbb{1}_B(x_i)$ d'après (2), donc par transitivité de l'égalité on en déduit que $\mathbb{1}_B(x_i) = 1$, autrement dit que x_i appartient à B. On a donc montré que $A \subseteq B$.

Montrons que χ est également surjective. Pour tout vecteur caractéristique $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathscr{B}^n$, la partie

$$A := \{x_i \in X \mid b_i = 1\}$$

constitue bien un antécédent puisque $\chi(A) = b$. Comme χ est une application, par définition $\mathrm{Def}(\chi) = X$. De plus χ est surjective, donc $\mathrm{Im}(\chi) = \mathscr{B}^n$. Comme elle est bijective, son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée ont même cardinal.

6» Dans les deux cas, il s'agit d'une égalité entre n-uplets, autrement dit il faut montrer l'égalité de chacune des n composantes. On considère donc A et B deux parties quelconques de X et une composante quelconque d'indice $i \in [\![1, n]\!]$.

Commençons par montrer que $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x_i) = \overline{\mathbb{1}_A(x_i)}$. C'est évident : $x \in A \Leftrightarrow x \notin \overline{A}$ et la table de l'opérateur de négation échange les rôles de 0 et 1 en cohérence.

On rappelle que $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$, autrement dit $x_i \in A \triangle B$ si et seulement si $x_i \in A$ ou $x_i \in B$ *exclusivement*. C'est précisément ce qu'exprime la table de l'opérateur « ou exclusif » $\oplus$:

$$x_i \in A \triangle B \Leftrightarrow \mathbb{1}_A(x_i) \oplus \mathbb{1}_B(x_i) = 1.$$

Exercice 2. On définit la relation binaire $\bowtie$ sur l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ par

$$(x, y) \bowtie (x', y') \Leftrightarrow x + y' = y + x'.$$

1» Écrivez une fonction `Papillon(A,B)` en *Python* qui renvoie le booléen `True` si $A \bowtie B$ et `False` sinon, où A et B sont codés par des tuples. La fonction ne devra contenir qu'une seule instruction !

2» Démontrez que $\bowtie$ est une relation d'équivalence.

3» Écrivez le sous-ensemble $C := \{-1, 0, 1\}^2$ de $\mathbb{Z}$ en extension.

4» On note $\bowtie_\pm$ la restriction de $\bowtie$ à C. Calculez les différentes classes d'équivalence pour la relation $\bowtie_\pm$. Combien y-en-a-t-il ?

5» Représentez C et $C/\bowtie_\pm$ dans le plan $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

Réponse.

1» La fonction Python peut s'écrire ainsi :

```
def Papillon(A,B):
    return A[0] + B[1] == A[1] + B[0]
```

2» Pour montrer que $\bowtie$ est une relation d'équivalence, on vérifie :

(1) Réflexivité : $(x, y) \bowtie (x, y)$ car $x + y = y + x$.
(2) Symétrie : si $(x, y) \bowtie (x', y')$ alors $x + y' = y + x'$, donc $x' + y = y' + x$, d'où $(x', y') \bowtie (x, y)$.
(3) Transitivité : si $(x, y) \bowtie (x', y')$ et $(x', y') \bowtie (x'', y'')$, alors $x + y' = y + x'$ et $x' + y'' = y' + x''$. En additionnant puis en simplifiant, on obtient $x + y'' = y + x''$, donc $(x, y) \bowtie (x'', y'')$.

Ainsi, $\bowtie$ est une relation d'équivalence.

3» On a :

$$C = \{(-1,-1), (-1,0), (-1,1), (0,-1), (0,0), (0,1), (1,-1), (1,0), (1,1)\}$$

4» Pour $\bowtie_{\pm}$, la classe d'équivalence de $(0, 0)$ est :

$$\overline{(0,0)} = \{(x, y) \in C \mid x + 0 = y + 0\} = \{(-1,-1), (0,0), (1,1)\}$$

Les autres classes d'équivalence sont :

$$\{(-1,0), (0,1)\}, \quad \{(0,-1), (1,0)\}, \quad \{(-1,1)\}, \quad \{(1,-1)\}.$$

Il y a donc 5 classes d'équivalence au total.

5» Représentation graphique : dans la partie $C = \{-1, 0, 1\}^2$ du plan $\mathbb{Z}^2$, chaque classe occupe une diagonale :

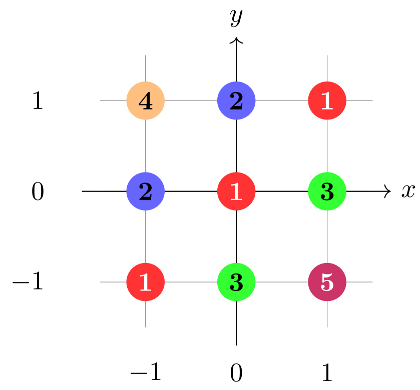

Figure 2. Représentation de C et de ses classes d'équivalence pour la relation $\bowtie_{\pm}$. Les points d'une même classe partagent une même couleur et un même numéro.