Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I23.

Contrôle Terminal #1 - Juin 2022

Exercices

Exercice 1. Soit X un ensemble, $P(x)$, $Q(x)$ et $R(x)$ des prédicats sur X. Écrivez la négation des propositions suivantes :

(1) $\exists x \in X \quad P(x) \Rightarrow \neg Q(x)$.

(2) $\forall x \in X\ \exists y \in X \quad P(x) \wedge (\neg Q(x) \vee R(y))$.

(3) $\forall x \in X \quad P(x) \Leftrightarrow Q(x)$.

(4) $\exists x \in X\ \forall y \in X \quad (P(x) \vee Q(x)) \Rightarrow \neg R(y)$.

Exercice 2. Exprimez les énoncés suivants en logique des prédicats :

(1) L'application f de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{N}$ est injective.

(2) L'entier naturel n est supérieur à 4 et il est divisible par 3.

(3) Soit n un entier naturel. L'ensemble I est l'intervalle des entiers naturels de 2 à n.

(4) L'ensemble X est l'ensemble des applications décroissantes de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}$.

Exercice 3. On définit la relation binaire Δ sur l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ par

$$(x,y)\,\Delta\,(x',y') \;\Leftrightarrow\; x+y' = y+x'. \tag{(1)}$$

(1) Écrivez une fonction `Delta(A,B)` en *Python* qui renvoie le booléen `True` si $A\,\Delta\,B$ et `False` sinon, où A et B sont codés par des tuples `A` et `B`. La fonction ne devra contenir qu'une seule instruction !

(2) Démontrez que Δ est une relation d'équivalence.

(3) Démontrez que l'ensemble des classes d'équivalence pour la relation Δ est dénombrable. Indication : considérez l'application $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}^2/\Delta$ définie par $f(x) = \overline{(x,0)}$ où $\overline{(x,0)}$ désigne la classe d'équivalence du couple $(x,0) \in \mathbb{Z}^2$.

(4) Écrivez le sous-ensemble $[\![-1,1]\!]^2$ de $\mathbb{Z}^2$ en extension.

(5) Soit $\Delta_\pm$ la restriction de Δ à $[\![-1,1]\!]^2$. Quelle est la classe d'équivalence de $(0,0)$ pour $\Delta_\pm$?

(6) Combien y-a-t-il de classes d'équivalence pour $\Delta_\pm$? Représentez les dans le plan.

(7) On définit la relation binaire Γ sur l'ensemble $\mathbb{Z}^2$ par

$$(x,y)\,\Gamma\,(x',y') \;\Leftrightarrow\; |x+y'| = |y+x'|. \tag{(2)}$$

où $|\cdot|$ est la valeur absolue. Représentez l'ensemble des éléments en relation avec $(0,0)$ dans le plan.

(8) Quelle(s) propriété(s) (réflexivité, symétrie, etc.) satisfait cette relation ? Justifiez.

Exercice 4. Soit la permutation

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 12 & 1 & 3 & 14 & 2 & 8 & 7 & 10 & 11 & 9 & 13 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

(1) Trouvez une décomposition de σ en produits de cycles à supports deux-à-deux disjoints.

(2) Quel est le type de la permutation σ ?

(3) Décomposez σ en produits de transpositions. Justifiez.

(4) Calculez la signature de σ. Justifiez.

(5) Peut-on trier la liste $[12,1,3,14,2,8,7,10,11,9,13,5,6,4]$ en effectuant un nombre *pair* d'échanges entre valeurs de la liste ? Justifiez.

(6) Calculez l'ordre de la permutation σ. Justifiez.

(7) Calculez σ^{2030}. Justifiez.

(8) Calculez $s := (8,4,9,6)(4,14)(6,9,4,8)$. Que peut-on dire des transpositions $(4,14)$ et s ?