

Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I-23.

Contrôle Terminal - Session 2 - Mai 2021

Exercice 1. Soit X et Y deux ensembles, $P(x)$ et $Q(x)$ deux prédicats. Écrivez la négation des propositions suivantes :

- (1) $\exists x \in X \quad P(x) \Rightarrow \neg Q(x)$;
- (2) $\forall x \in X \exists y \in Y \quad P(x) \wedge (Q(x) \vee \neg R(y))$;
- (3) $\exists x \in X \quad P(x) \oplus \neg Q(x)$;
- (4) $\exists x \in X \forall y \in Y \quad (P(x) \wedge \neg Q(x)) \Rightarrow R(x)$;

Exercice 2. Exprimez les phrases suivantes en logique des prédicats :

- (1) f est l'application identité de \mathbb{Z} dans \mathbb{N} ;
- (2) n est un entier naturel pair ;
- (3) n est un entier naturel et I est l'intervalle des entiers naturels de 2 à n .
- (4) X est l'ensemble des applications croissantes de \mathbb{N} dans \mathbb{Z} .

Exercice 3. On note $Q := \{0, 1\}^4$ l'ensemble des quadruplets binaires et $\mathcal{H} := [0, 9] \cup \{A, B, C, D, E, F\}$ l'alphabet hexadécimal muni de son ordre alphabétique \leq où $0 \leq 1 \leq 2 \leq \dots \leq 9 \leq A \leq B \leq \dots \leq F$. On définit deux applications $\varphi : \{0, 1\}^4 \rightarrow \mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ et $\psi : \mathbb{Z}/16\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{H}$:

$$\varphi(b_0, b_1, b_2, b_3) := \sum_{i=0}^3 b_i 2^i \quad \text{et} \quad \psi(k) := k\text{-ème lettre de } \mathcal{H}$$

- (1) Calculez $\varphi(0, 1, 1, 1)$, $\psi(\{0, 3, 12\})$, $\psi^{-1}(\{5, C\})$ et $(\psi \circ \varphi)^{-1}(\{0, F\})$.
- (2) L'application φ est-elle injective, surjective, bijective ? Justifiez.
- (3) L'application ψ est-elle injective, surjective, bijective ? Justifiez.

On note $\lambda := \psi \circ \varphi$ et on définit l'opérateur binaire \boxplus sur l'alphabet \mathcal{H} à l'aide de l'opérateur \oplus (le ou exclusif) *bit-à-bit* sur Q :

$$\forall (x, y) \in \mathcal{H}^2 \quad x \boxplus y := \lambda(\lambda^{-1}(x) \oplus \lambda^{-1}(y)).$$

- (3) Calculez $A \boxplus 3$ et $7 \boxplus C$.
- (4) Le magma (\mathcal{H}, \boxplus) est-il commutatif, associatif ? Justifiez.

- (5) Démontrez que le magma (\mathcal{H}, \boxplus) est unifié.
- (6) Quels sont les éléments de (\mathcal{H}, \boxplus) qui sont symétrisables et quels sont leurs symétriques ? Justifiez.
- (7) Démontrez que λ est un isomorphisme de (Q, \oplus) dans (\mathcal{H}, \boxplus) .