

Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I-23.

Contrôle Terminal - Session 2 - Juin 2019

Exercice 1. Modélisez les propositions suivantes exprimées en langue naturelle en formules de la logique propositionnelle. Pour cela définissez pour chaque question les variables propositionnelles et leur interprétation *avant* de donner une formule (aucun point ne sera accordé dans le cas contraire).

Exemple : « Il n'y a pas de fumée sans feu ». On définit deux variables propositionnelles, P interprétée par « Il y a de la fumée » et Q interprétée « Il y a du feu ». Une formule possible est alors

$$\neg(P \wedge \neg Q).$$

- (1) En reprenant l'exemple ci-dessus, la formule $Q \Rightarrow P$ est-elle également juste ? (Justifiez).
- (2) « Une hirondelle ne fait pas le printemps ».
- (3) « Oscar ne vient pas si Alice et Bob viennent. ».
- (4) « Qui vole un œuf vole un bœuf ».
- (5) « Il est impossible de tricher sans se faire prendre ni être sanctionné ».
- (6) « Continue comme ça et tu vas t'en prendre une ».
- (7) « Pour jouer au poker il faut un paquet de 32 cartes ».
- (8) « Que vous ayez rempli ou non votre copie, vous devrez la rendre ».

Exercice 2. La couleur d'un pixel sur un écran est codé par un triplet (R, V, B) de I^3 où $I := \llbracket 0, 255 \rrbracket$ désigne un intervalle de l'ensemble des entiers naturels muni de l'ordre naturel. Chacune des trois valeurs code une intensité lumineuse (0 pour l'absence de lumière, 255 pour l'intensité maximale). On désigne par $p_i : I^3 \rightarrow I$ la i -ème projection :

$$\forall i \in \{1, 2, 3\} \quad p_i(x_1, x_2, x_3) := x_i.$$

- (1) Combien de couleurs différentes peuvent être ainsi codées ? Justifiez.
- (2) L'application p_1 est-elle injective, surjective, bijective ? Justifiez.
- (3) Calculez l'ensemble $J := p_1^{-1}(255) \cap p_3^{-1}(255)$.
- (4) Quel est le cardinal de J ?

On note $\varphi : \{0, 1\}^8 \rightarrow \mathbb{Z}/256\mathbb{Z}$ l'application définie par

$$\varphi(b_0, b_1, \dots, b_7) := \sum_{i=0}^7 b_i 2^i.$$

- (5) Calculez $\varphi(1, 1, \dots, 1)$ et $\varphi^{-1}(57)$.
- (6) Démontrez que φ est bijective.
- (7) On munit $\{0, 1\}^8$ de la loi additive produit $+$ de l'addition booléenne sur $\{0, 1\}$. L'application φ est-elle un morphisme de $(\{0, 1\}^8, +)$ dans $\mathbb{Z}/256\mathbb{Z}$? Justifiez.
- (8) On définit une loi de composition interne $\diamond$ sur $\{0, 1\}^8$ par $x \diamond y := \varphi^{-1}(\varphi(x) + \varphi(y))$.
- (9) La loi $\diamond$ est-elle associative ? Commutative ? Admet-elle un élément neutre, si oui lequel. Justifiez.
- (10) Les éléments de $\{0, 1\}^8$ sont-ils symétrisables pour la loi $\diamond$?