Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I23.

Contrôle Continu Terminal - Mai 2024

Correction des exercices

EXERCICE 1. Soit σ la permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 3 & 4 & 9 & 10 & 6 & 12 & 1 & 14 & 13 & 2 & 5 & 8 & 7 & 11 \end{pmatrix}.$$

1) Trouvez une décomposition de σ en produits de cycles à supports deux-à-deux disjoints.

2) Quel est le type de la permutation σ ?

3) Décomposez σ en produits de transpositions.

4) Calculez la signature de σ.

5) Peut-on trier la liste $[3, 4, 9, 10, 5, 12, 1, 14, 13, 2, 6, 8, 7, 11]$ en effectuant un nombre *pair* d'échanges entre valeurs de la liste ?

6) Calculez l'ordre de la permutation σ.

7) Calculez σ^{2023}.

8) Démontrez que $s := (7, 4, 9, 6)(3, 8)(6, 9, 4, 7)$ est une transposition *sans la calculer*.

EXERCICE 2. Justifiez l'existence puis calculez l'inverse de 123 dans $\mathbb{Z}/2024\mathbb{Z}$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu et de l'identité de Bézout.

EXERCICE 3. Dans la suite, les éléments de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont représentés par les entiers 0, $+1$ et -1. Toute application $s : [\![0, n-1]\!] \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$ est appelée *séquence ternaire de longueur* n et est codée par un n-uplet $(s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$. La séquence obtenue en décalant circulairement les valeurs de s de k positions est notée $\sigma(s, k)$. Par exemple pour $s := (+1, -1, 0, 0, +1, 0, +1)$, on a

$$\sigma(s, 2) = (\mathbf{0}, +\mathbf{1}, +1, -1, 0, 0, +1) \quad \text{et} \quad \sigma(s, 3) = (+\mathbf{1}, \mathbf{0}, +\mathbf{1}, +1, -1, 0, 0) \tag{1}$$

L'*autocorrélation* $R_s(k)$ pour un décalage k d'une séquence ternaire s est le produit scalaire des séquences s et $\sigma(s, k)$ dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire :

$$R_s(k) = \sum_{i=0}^{n-1} s_i \, . \, s_{i+k} \quad (i + k \text{ est calculé modulo } n := |s|). \tag{2}$$

Avec l'exemple (1), les 7 produits terme à terme de s et $\sigma(s, 3)$ sont donnés dans la table :

	0	1	2	3	4	5	6
s	$+1$	-1	0	0	$+1$	0	$+1$
$\sigma(s,3)$	$+1$	0	$+1$	$+1$	-1	0	0
	$\mathbf{+1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{-1}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$

et leur somme calculée dans $\mathbb{Z}$ donne $R_s(3) = 0$.

1) (1.5) Formalisez la définition de la fonction de décalage circulaire σ sur des n-uplets ternaires.

2) (1.0) Combien existe-t-il de séquences ternaires de longueur n ?

3) (3.0) Donnez un encadrement de l'autocorrélation $R_s(k)$ d'une séquence ternaire s de longueur n. Les bornes de cet encadrement sont-elles atteintes ?

4) (1.5) Écrivez une fonction Python `rotation(s,k)` qui calcule la fonction σ en renvoyant le tuple obtenu en décalant circulairement les valeurs du tuple `s` en paramètre de `k` positions.

5) (2.5) On définit une fonction $h : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{[\![0,n-1]\!]} \to [\![-n, n]\!]^3$ par

$$h(s) = (|s^{-1}(\{-1\})|, |s^{-1}(\{0\})|, |s^{-1}(\{+1\})|)$$

le triplet constitué du nombre de -1, de 0 et de $+1$ dans la séquence s. La fonction h est-elle surjective, injective ?

6) (1.0) Montrez que la relation binaire définie sur l'ensemble des séquences ternaires de longueur n par $s \mathscr{R} s'$ si et seulement si $h(s) = h(s')$ est une relation d'équivalence.

7) (1.5) Quel est le cardinal de l'ensemble quotient $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2/\mathscr{R}$?