Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I23.

Contrôle Terminal #1 - Mai 2022

Exercices

Exercice 1. Formalisez les propositions suivantes exprimées en langue naturelle en formules de la logique propositionnelle. Pour cela définissez pour chaque question les variables propositionnelles et leur interprétation *avant* de donner une formule (aucun point ne sera accordé dans le cas contraire). Exemple :

"Il n'y a pas de fumée sans feu". On définit deux variables propositionnelles, P interprétée par *"Il y a de la fumée"* et Q interprétée *"Il y a du feu"*. Une formule possible est alors $\neg(P \wedge \neg Q)$.

(1) *"Bob travaille mais pas Alice."*

(2) *"Pas de bras, pas de chocolat !"*

(3) *"Léon ne partira pas si Tom est en retard et si Chloé n'est pas là."*

(4) *"Qui vole un œuf vole un bœuf"*.

(5) *"Il n'est pas possible de tricher sans être vu ni être sanctionné."*

(6) *"Continue comme ça et tu vas t'en prendre une !"*

(7) *"Si c'est froid, c'est de la soupe, si c'est chaud, c'est de la bière !"*

(8) *"Que vous ayez terminé ou non l'examen à temps, vous devrez rendre votre copie."*

Exercice 2. On note $\mathscr{O} := \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ muni de la relation d'ordre $\preccurlyeq$ définie par $A \preccurlyeq B \preccurlyeq \cdots \preccurlyeq G \preccurlyeq H$ et $\mathscr{T} := \{0,1\}^3$ l'ensemble des triplets binaires. On définit les deux applications $\varphi : \mathscr{T} \to \mathbb{Z}/8\,\mathbb{Z}$ et $\psi : \mathbb{Z}/8\,\mathbb{Z} \to \mathscr{O}$ par :

$$\varphi(b_0, b_1, b_2) := \sum_{i=0}^{2} b_i\, 2^i \quad \text{et} \quad \psi(k) := k\text{-ème lettre de } \mathscr{O} \;\; (0 \text{ pour } A)$$

(1) Calculez $\varphi^{-1}(\{2,3\})$, $\psi(\{0,3\})$, $\psi^{-1}(\{B,F\})$ et $(\psi \circ \varphi)^{-1}(\{B,D\})$.

(2) Les applications φ et ψ sont-elles injectives ? Surjectives ? Justifiez.

(3) Démontrez que la relation binaire $\overset{\#}{=}$ définie sur $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ par $x \overset{\#}{=} y$ si x et y ont la même longueur quand ils sont écrits en toutes lettres (*zéro*, *un*, *deux*, …, *sept*) est une relation d'équivalence. Quel est l'ensemble quotient pour cette relation ?

(4) On note $\lambda := \psi \circ \varphi$ et on définit l'opérateur binaire $\boxplus$ sur $\mathscr{O}$ par :

$$\forall (x,y) \in \mathscr{O}^2 \quad x \boxplus y := \lambda(\lambda^{-1}(x) \oplus \lambda^{-1}(y))$$

où $\oplus$ désigne l'opérateur ou exclusif *bit-à-bit* sur $\mathscr{T}$. Calculez $A \boxplus C$ et $H \boxplus C$.

(5) Le magma $(\mathscr{O}, \boxplus)$ est-il commutatif, associatif ? Justifiez.

(6) Démontrez que le magma $(\mathscr{O}, \boxplus)$ est unifère.

(7) Quels sont les symétriques des éléments symétrisables de $(\mathscr{O}, \boxplus)$? Justifiez.

(8) On transporte la multiplication de $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ dans $\mathscr{O}$ par ψ. Quels sont les inversibles de $(\mathscr{O}, \times)$?

Exercice 3. Soit la permutation

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 12 & 1 & 3 & 14 & 2 & 8 & 7 & 10 & 11 & 9 & 13 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) Trouvez une décomposition de σ en produits de cycles à supports deux-à-deux disjoints.

(2) Quel est le type de la permutation σ ?

(3) Décomposez σ en produits de transpositions. Justifiez.

(4) Calculez la signature de σ. Justifiez.

(5) Peut-on trier la liste $[12, 1, 3, 14, 2, 8, 7, 10, 11, 9, 13, 5, 6, 4]$ en effectuant un nombre *pair* d'échanges entre valeurs de la liste ? Justifiez.

(6) Calculez l'ordre de la permutation σ. Justifiez.

(7) Calculez σ^{2030}. Justifiez.

(8) Démontrez que $s := (8,4,9,6)(4,14)(6,9,4,8)$ est une transposition sans la calculer.