Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I23.

Contrôle Terminal #1 - Mai 2021

Exercices

Exercice 1. Formalisez les propositions suivantes exprimées en langue naturelle en formules de la logique propositionnelle. Pour cela définissez pour chaque question les variables propositionnelles et leur interprétation *avant* de donner une formule (aucun point ne sera accordé dans le cas contraire).

Exemple : *"Il n'y a pas de fumée sans feu"*. On définit deux variables propositionnelles, P interprétée par *"Il y a de la fumée"* et Q interprétée *"Il y a du feu"*. Une formule possible est alors $\neg(P \wedge \neg Q)$.

(1) En reprenant l'exemple ci-dessus, la formule $Q \Rightarrow P$ est-elle également juste ? (Justifiez).

(2) *"Pas de roses sans épines."*.

(3) *"Oscar ne viendra pas si Alice est présente et si Bob est absent."*.

(4) *"Qui vole un œuf vole un bœuf"*.

(5) *"Il est impossible de tricher sans se faire prendre ni être sanctionné"*.

(6) *"Continue comme ça et tu vas t'en prendre une !"*.

(7) *"La cuisine anglaise :si c'est froid, c'est de la soupe, si c'est chaud, c'est de la bière !"*.

(8) *"Que vous ayez rempli ou non votre copie, vous devrez la rendre"*.

Exercice 2. On note $Q := \{0,1\}^4$ l'ensemble des quadruplets binaires et $\mathscr{H} := [0,9] \cup \{A,B,C,D,E,F\}$ l'alphabet hexadécimal muni de son ordre alphabétique $\preceq$ où $0 \preceq 1 \preceq 2 \preceq \cdots \preceq 9 \preceq A \preceq B \preceq \cdots \preceq F$. On définit deux applications $\varphi : \{0,1\}^4 \to \mathbb{Z}/16\,\mathbb{Z}$ et $\psi : \mathbb{Z}/16\,\mathbb{Z} \to \mathscr{H}$:

$$\varphi(b_0,b_1,b_2,b_3) := \sum_{i=0}^{3} b_i\, 2^i \quad \text{et} \quad \psi(k) := k\text{-ème lettre de } \mathscr{H}$$

(1) Calculez $\varphi(0,1,1,1)$, $\psi(\{0,3,12\})$, $\psi^{-1}(\{5,C\})$ et $(\psi\circ\varphi)^{-1}(\{0,F\})$.

(2) L'application φ est-elle injective, surjective, bijective ? Justifiez.

(3) L'application ψ est-elle injective, surjective, bijective ? Justifiez.

On note $\lambda := \psi \circ \varphi$ et on définit l'opérateur binaire $\boxplus$ sur l'alphabet $\mathscr{H}$ à l'aide de l'opérateur $\oplus$ (le ou exclusif) *bit-à-bit* sur Q :

$$\forall (x,y) \in \mathscr{H}^2 \quad x \boxplus y := \lambda(\lambda^{-1}(x) \oplus \lambda^{-1}(y)).$$

(3) Calculez $A \boxplus 3$ et $7 \boxplus C$.

(4) Le magma $(\mathscr{H}, \boxplus)$ est-il commutatif, associatif ? Justifiez.

(5) Démontrez que le magma $(\mathscr{H}, \boxplus)$ est unifère.

(6) Quels sont les éléments de $(\mathscr{H}, \boxplus)$ qui sont symétrisables et quels sont leurs symétriques ? Justifiez.

(7) Démontrez que λ est un isomorphisme de $(Q, \oplus)$ dans $(\mathscr{H}, \boxplus)$.

Exercice 3. Soit la permutation

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 12 & 1 & 3 & 14 & 2 & 8 & 7 & 10 & 11 & 9 & 13 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}$$

(1) Trouvez une décomposition de σ en produits de cycles à supports deux-à-deux disjoints.

(2) Quel est le type de la permutation σ ?

(3) Décomposez σ en produits de transpositions. Justifiez.

(4) Calculez la signature de σ. Justifiez.

(5) Peut-on trier la liste $[12,1,3,14,2,8,7,10,11,9,13,5,6,4]$ en effectuant un nombre *pair* d'échanges entre valeurs de la liste ? Justifiez.

(6) Calculez l'ordre de la permutation σ. Justifiez.

(7) Calculez σ^{2021}. Justifiez.

(8) Calculez $s := (8,4,9,6)(4,14)(6,9,4,8)$. Que peut-on dire des transpositions $(4,14)$ et s ?