

Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I-23.

Contrôle Continu Terminal - Mai 2024

Exercice 1. Justifiez l'existence puis calculez l'inverse de 123 dans $\mathbb{Z}/2024\mathbb{Z}$ à l'aide de l'algorithme d'Euclide étendu et de l'identité de Bézout.

Exercice 2. Dans la suite, les éléments de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ sont représentés par les entiers 0, +1 et -1. Toute application $s : \llbracket 0, n-1 \rrbracket \rightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ avec $n \in \mathbb{N}$ est appelée *séquence ternaire de longueur n* et est codée par un n -uplet $(s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$. La séquence obtenue en décalant circulairement les valeurs de s de k positions est notée $\sigma(s, k)$. Par exemple pour $s := (+1, -1, 0, 0, +1, 0, +1)$, on a

$$\sigma(s, 2) = (0, +1, +1, -1, 0, 0, +1) \quad \text{et} \quad \sigma(s, 3) = (+1, 0, +1, +1, -1, 0, 0) \quad (1)$$

L'autocorrélation $R_s(k)$ pour un décalage k d'une séquence ternaire s est le produit scalaire des séquences s et $\sigma(s, k)$ dans $\mathbb{Z}$, c'est-à-dire :

$$R_s(k) = \sum_{i=0}^{n-1} s_i \cdot s_{i+k} \quad (i+k \text{ est calculé modulo } n := |s|). \quad (2)$$

Avec l'exemple (1), les 7 produits terme à terme de s et $\sigma(s, 3)$ sont donnés dans la table :

	0	1	2	3	4	5	6
s	+1	-1	0	0	+1	0	+1
$\sigma(s, 3)$	+1	0	+1	+1	-1	0	0
	+1	0	0	0	-1	0	0

et leur somme calculée dans $\mathbb{Z}$ donne $R_s(3) = 0$.

- (1) (1.5) Formalisez la définition de la fonction de décalage circulaire σ sur des n -uplets ternaires.
- (2) (1.0) Combien existe-t-il de séquences ternaires de longueur n ?
- (3) (3.0) Donnez un encadrement de l'autocorrélation $R_s(k)$ d'une séquence ternaire s de longueur n . Les bornes de cet encadrement sont-elles atteintes ?

- (4) (1.5) Écrivez une fonction Python `rotation(s,k)` qui calcule la fonction σ en renvoyant le tuple obtenu en décalant circulairement les valeurs du tuple s en paramètre de k positions.

- (5) (2.5) On définit une fonction $h : (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^{\llbracket 0, n-1 \rrbracket} \rightarrow \llbracket -n, n \rrbracket^3$ par

$$h(s) = (|s^{-1}(\{-1\})|, |s^{-1}(\{0\})|, |s^{-1}(\{+1\})|)$$

le triplet constitué du nombre de -1, de 0 et de +1 dans la séquence s . La fonction h est-elle surjective, injective ?

- (6) (1.0) Montrez que la relation binaire définie sur l'ensemble des séquences ternaires de longueur n par $s \mathcal{R} s'$ si et seulement si $h(s) = h(s')$ est une relation d'équivalence.
- (7) (1.5) Quel est le cardinal de l'ensemble quotient $(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2 / \mathcal{R}$?