Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I23.

TD 5. Combinatoire [1]

EXERCICE 1. Démontrez qu'un ensemble naturel $\mathscr{N}$ est totalement ordonné.

Solution. Notons $\preceq$ la relation d'ordre de $\mathscr{N}$. Considérons deux éléments a et b distincts d'un ensemble naturel $\mathscr{N}$, ce qui est possible sans quoi l'ensemble $\mathscr{N}$ serait majoré contredisant ainsi la troisième propriété des ensembles naturels. D'après l'axiome de la paire, l'ensemble $\{a, b\}$ existe et n'est pas vide. D'après la première propriété des ensembles naturels, il admet donc un plus petit élément , i.e.

$$\exists m \in \{a, b\} \quad (m \preceq a) \wedge (m \preceq b)$$

Comme $m \in \mathscr{N}$ on a $(m = a) \vee (m = b)$ et on en déduit que $(a \preceq b) \vee (b \preceq a)$ donc tous les éléments de $\mathscr{N}$ sont comparables.

EXERCICE 2. Considérons $X := \{\upsilon, \zeta, \tau\}$ muni de l'ordre alphabétique grec et $Y := \{z, t, u\}$ muni de l'ordre alphabétique latin. Démontrez qu'il existe une unique bijection croissante entre X et Y et que sa bijection réciproque est croissante elle aussi.

Solution. L'ensemble des bijections de X dans Y n'est pas vide, prendre par exemple $f : X \to Y$ définie par $f(\upsilon) = z$, $f(\zeta) = t$ et $f(\tau) = u$ où il est facile de vérifier que deux éléments différents ont des images différentes et que tous les élements de Y ont bien un antécédent. Soit donc f une bijection quelconque de $X \to Y$. L'ordre alphabétique grec et l'ordre alphabétique latin nous fournissent les inégalités suivantes (nous avons utilisé le même symbole pour les deux relations d'ordre par abus de langage) :

$$\zeta \leqslant \tau \leqslant \upsilon \tag{1}$$

$$t \leqslant u \leqslant z \tag{2}$$

Puisque f est croissante, d'après (1), elle doit satisfaire les inégalités suivantes :

$$f(\zeta) \leqslant f(\tau) \leqslant f(\upsilon)$$

Si $f(\tau) \neq u$, nécessairement l'une des deux inégalités de (2) ne sera pas satisfaite donc $f(\tau) = u$ et il est facile de vérifier qu'alors seules les valeurs $f(\zeta) = t$ et $f(\upsilon) = z$ conviennent. Il est immédiat de vérifier que f^{-1} est elle aussi croissante.

EXERCICE 3. Inspirez vous de la construction d'un successeur pour définir le *prédécesseur* $\operatorname{prec}(n)$ d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Indication : construisez un segment auquel vous appliquerez la deuxième propriété d'un ensemble naturel.

Solution. On considère le segment $[\![0, n-1]\!] = \{k \in \mathbb{N} \mid k < n\}$ qui est non-vide car $n > 0$ et qui est majoré par n. Il admet donc un plus grand élément, le prédécesseur de n.

EXERCICE 4. † Démontrez que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad \operatorname{pred}(\operatorname{succ}(n)) = n. \tag{3}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad \operatorname{succ}(\operatorname{pred}(n)) = n. \tag{4}$$

Solution. Pour (3), notons $p := \operatorname{succ}(n)$ et $m := \operatorname{pred}(p)$ et montrons que $m = n$ par l'absurde. Supposons que $m \neq n$. Comme l'ordre naturel est un ordre total, tous les entiers naturels sont comparables, donc $m \geqslant n$ ou $m \leqslant n$ et si $m \neq n$ alors $m > n$ ou $m < n$. Si $m > n$ alors m est un majorant de n, mais par définition p est le plus petit des majorants de n, donc $p \leqslant m$ ce qui est absurde puisque $m < p$ car m est le prédécesseur de p. On a donc à ce stade $m \leqslant n$. Si $m < n$ alors m ne serait plus le plus grand des minorants de p puisque $n < p$, donc $m \geqslant n$ et finalement $n = m$. La proposition (4) se démontre de manière similaire.

EXERCICE 5. † Démontrez que l'application $\operatorname{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ est une bijection croissante. En déduire que l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est un ensemble naturel.

Solution. Les identités (3) et (4) expriment que $\operatorname{succ} \circ \operatorname{pred} = \operatorname{Id}_{\mathbb{N}*}$ et que $\operatorname{pred} \circ \operatorname{succ} = \operatorname{Id}_{\mathbb{N}*}$ et ce théorème permet de conclure que succ et pred sont des bijections, réciproques l'une de l'autre sur $\mathbb{N}^*$. Montrons que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \quad x \leqslant y \Rightarrow \operatorname{succ}(x) \leqslant \operatorname{succ}(y). \tag{5}$$

Par contraposition, supposons que $\operatorname{succ}(y) < \operatorname{succ}(x)$. Dans ce cas $\operatorname{succ}(y) \leqslant x$ et comme $y < \operatorname{succ}(y)$ on en déduit par transitivité que $y < x$. L'application est donc croissante.

[1] version du 12 avril 2023, 10 : 51

Les trois propriétés caractéristiques d'un ensemble naturel se transportent aisément de $\mathbb{N}$ à $\mathbb{N}^*$. Soit A une partie non-vide de $\mathbb{N}^*$, son image $\text{pred}(A)$ par le prédécesseur est une partie non-vide de $\mathbb{N}$ qui admet un plus petit élément a, soit

$$\forall x \in \text{pred}(A) \quad a \leqslant x$$

Mais d'après la croissance de l'application succ, on a $\forall x \in \text{pred}(A)\ \text{succ}(a) \leqslant \text{succ}(x)$ ce qui entraîne $\forall x \in A\ \text{succ}(a) \leqslant x$, or $\text{succ}(a) \in A$, c'est donc le plus petit élément de A.
On procède de manière similaire pour une partie non-vide et majorée et on montre aisément que si $\mathbb{N}^*$ admettait un plus grand élément, alors son prédécesseur serait un plus grand élément de $\mathbb{N}$, ce qui est absurde.

EXERCICE 6. Démontrez que l'ensemble des entiers naturels muni de l'ordre naturel est archimédien. Indication : considérez l'ensemble $\{ka \mid k \in \mathbb{N} \ \wedge \ 1 \leqslant k\ a \leqslant b\}$.

Solution. On doit montrer que

$$\forall (a,b) \in (\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}) \ \ \exists n \in \mathbb{N} \quad b < na. \tag{6}$$

Si $a > b$ l'entier $n = 1$ convient. Dans la cas contraire on considère l'ensemble $P := \{ka \mid k \in \mathbb{N} \ \wedge \ 1 \leqslant ka \leqslant b\}$. Cette partie de l'ensemble $\mathbb{N}$ n'est pas vide puisque $a \in P$ et elle est majorée par b. D'après la deuxième propriété axiomatique de $\mathbb{N}$, la partie P admet donc un plus grand élément κa. Notons $n := \text{succ}(\kappa)$, alors $\kappa a < na$ et par conséquent $na \notin P$, soit $b < na$.

EXERCICE 7. Soit X un ensemble fini. Explicitez ce qui permet d'écrire que $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ (qui est un abus de langage pour $\{x_i \mid i \in [\![1,n]\!]\}$). Même question si X est un ensemble dénombrable pour l'écriture $X = \{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$.

Solution. Par définition si X est fini alors il existe un entier naturel n non-nul tel que $[\![1,n]\!] \approx X$, autrement dit il existe une bijection $x : [\![1,n]\!] \to X$ et pour tout $i \in [\![1,n]\!]$, on note $x_i := x(i)$.
Par définition si X est dénombrable alors $\mathbb{N} \approx X$, autrement dit il existe une bijection $x : \mathbb{N} \to X$ et pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note $x_i := x(i)$.

EXERCICE 8. ‡ Soit n et m deux entiers naturels et $f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_m$ une application. Démontrez que

(1) Si f est une injection alors $n \leqslant m$.

(2) Si f est une surjection alors $m \leqslant n$.

(3) Si f est une bijection alors $n = m$.

Solution. **(1)** La condition $n \leqslant m$ est suffisante pour avoir l'injectivité, en effet si $n \leqslant m$ alors l'injection canonique de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,m]\!]$ fait l'affaire. Montrons qu'elle est nécessaire. Considérons le prédicat $P(n)$ suivant : pour tout $m \in \mathbb{N}$, s'il existe une injection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,m]\!]$ alors $n \leqslant m$. On a $P(0)$ car toute application dont l'ensemble de départ est vide est injective. Soit m un entier quelconque et $f : [\![1,n+1]\!] \to [\![1,m]\!]$ une injection. On vérifie aisément que l'application

$$g : [\![1,n]\!] \to [\![1,m]\!] \backslash \{f(n+1)\}$$

définie par $g(x) := f(x)$ est une injection. D'autre part en renumérotant les éléments de l'ensemble $[\![1,m]\!]\backslash\{f(n+1)\}$ à partir du “trou” laissé par $f(n{+}1)$ dans l'ensemble $[\![1,m]\!]$ grâce à la bijection (à vérifier par le lecteur) $\sigma : [\![1,m]\!]\backslash\{f(n+1)\} \to [\![1,m-1]\!]$ définie par

$$\sigma(i) := \begin{cases} f(i) & \text{si } f(i) < f(n+1), \\ f(i) - 1 & \text{si } f(i) \geqslant f(n+1) \end{cases}$$

L'application $\sigma \circ g$ est une injection de $[\![1,n]\!]$ dans $[\![1,m-1]\!]$ et l'hypothèse de récurrence nous donne $n \leqslant m-1$ soit $n+1 \leqslant m$.

(2) Supposons que $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,m]\!]$ soit surjective. Par définition, pour tout entier $k \in [\![1,m]\!]$ son image réciproque $f^{-1}(k)$ n'est pas vide, elle admet donc un plus petit élément x_k d'après la première propriété d'un ensemble naturel. Ceci prouve que l'on définit bien une application $x : [\![1,m]\!] \to [\![1,n]\!]$ par

$$\forall k \in [\![1,m]\!] \quad x_k := \min f^{-1}(k).$$

Elle est injective car si $x_k = x_l$ alors $f(x_k) = f(x_l)$ or $f(x_k) = k$ et $f(x_l = l$. On applique alors le résultat précédent.

(3) C'est la conséquence des deux premières propositions.

EXERCICE 9. Soit n un entier naturel. Démontrez par récurrence que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \tag{7}$$

Solution. On considère le prédicat $P(n)$ défini par l'identité (7). C'est vrai pour $n = 0$ et on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1) + 6(n+1)^2}{6} \\ &= \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}\end{aligned}$$

L'équation $2n^2 + 7n + 6 = 0$ admet -2 et $-3/2$ pour solutions donc

$$2n^2 + 7n + 6 = 2(n+2)(n+3/2) = (n+2)(2n+3)$$

et finalement

$$\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)((n+1)+1)(2(n+1)+1)}{6}$$

donc $P(n+1)$ est vrai.

EXERCICE 10. Démontrez que le quotient d'un entier naturel impair et d'un entier naturel pair n'est jamais un nombre entier.

Solution. Soit p un entier, q un entier pair. Puisque q est pair, il existe un entier naturel k tel que $q = 2k$. Par conséquent, le quotient $\frac{p}{q}$ est entier si et seulement si $2k \mid p$, autrement dit si et seulement s'il existe un entier naturel l tel que $2kl = p$. On vient donc de montrer que si le quotient $\frac{p}{q}$ d'un nombre entier quelconque p avec un nombre pair q est un nombre entier, alors le nombre p est pair, autrement dit que

$$\forall p \in \mathbb{N}\ \forall q \in \mathbb{N}\ \Big(\underbrace{(\exists k \in \mathbb{N}\ q = 2k) \wedge (q \mid p)}_{A}\Big) \Rightarrow \underbrace{(\exists k' \in \mathbb{N}\ p = 2k')}_{B}.$$

En utilisant la contraposée $\neg B \Rightarrow \neg A$ et les lois de De Morgan pour calculer $\neg A$, on obtient la proposition logiquement équivalente suivante :

$$\forall p \in \mathbb{N}\ \forall q \in \mathbb{N}\ \neg(\exists k' \in \mathbb{N}\ p = 2k') \Rightarrow \big(\neg(\exists k \in \mathbb{N}\ q = 2k) \vee \neg(q \mid p)\big).$$

Or $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$ donc

$$\forall p \in \mathbb{N}\ \forall q \in \mathbb{N}\ (\exists k' \in \mathbb{N}\ p = 2k') \vee \big(\neg(\exists k \in \mathbb{N}\ q = 2k) \vee \neg(q \mid p)\big).$$

Et par associativité du connecteur ou logique $A \vee (B \vee C) \equiv (A \vee B) \vee C$:

$$\forall p \in \mathbb{N}\ \forall q \in \mathbb{N}\ \big((\exists k' \in \mathbb{N}\ p = 2k') \vee \neg(\exists k \in \mathbb{N}\ q = 2k)\big) \vee \neg(q \mid p).$$

On applique encore $(\neg A \vee B) \equiv (A \Rightarrow B)$ pour arriver à

$$\forall p \in \mathbb{N}\ \forall q \in \mathbb{N}\ \big(\neg(\exists k' \in \mathbb{N}\ p = 2k') \wedge (\exists k \in \mathbb{N}\ q = 2k)\big) \Rightarrow \neg(q \mid p).$$

Ce qui se traduit par : si p est un nombre entier impair et q est un nombre entier pair, alors le quotient $\frac{p}{q}$ n'est pas entier.

EXERCICE 11. ‡ Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$. On définit la suite réelle $(H_n)_{n \in \mathbb{N}\backslash\{0\}}$ par

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Démontrez par récurrence que pour $n \geqslant 2$, H_n n'est pas un entier naturel. Indication : montrez que H_n est une fraction avec un numérateur impair et un dénominateur pair en distinguant le cas où n est pair et n est impair (dans ce dernier cas, séparez les termes de la somme en deux groupes, ceux avec un dénominateur pair et ceux avec un dénominateur impair.)

Solution. Considérons le prédicat "le nombre H_n est un quotient dont le numérateur est un entier naturel impair et le dénominateur est un entier naturel pair". On a $H_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ donc $P(2)$ est vrai. Supposons tout d'abord que n soit pair, soit $n = 2m$. Alors

$$H_{n+1} = H_n + \frac{1}{2m+1}$$

mais l'hypothèse de récurrence $P(n)$ nous permet d'écrire que $H_n = \frac{2u+1}{2v}$ donc

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= \frac{2u+1}{2v} + \frac{1}{2m+1} \\ &= \frac{(2m+1)(2u+1)+2v}{2v.(2m+1)} \\ &= \frac{4mu+2m+2u+1+2v}{2v.(2m+1)} \\ &= \frac{2(2mu+m+u+v)+1}{2v.(2m+1)} \end{aligned}$$

Donc H_{n+1} est le quotient $\frac{2x+1}{2y}$ d'un nombre impair et d'un nombre pair qui n'est jamais entier.
Supposons à présent que n soit impair, soit $n = 2m-1$. Dans ce cas on regroupe les fractions dont les dénominateurs ont la même parité :

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= H_n + \frac{1}{2m} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2m-1} + \frac{1}{2m} \\ &= (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2m-1}) + (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m}) \\ &= (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2m-1}) + \frac{1}{2}(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdots + \frac{1}{m}) \\ &= (1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2m-1}) + \frac{1}{2}H_m \end{aligned}$$

En réduisant au même dénominateur, la somme à gauche dans la dernière expression et en la notant $\frac{a}{2w+1}$ car le dénominateur est un produit de nombres impairs donc impair. Si on fait l'hypothèse de récurrence forte, on sait que $H_m = \frac{2u+1}{2v}$ et donc

$$\begin{aligned} H_{n+1} &= \frac{a}{2w+1} + \frac{2u+1}{4v} \\ H_{n+1} &= \frac{2av+(2u+1)(2w+1)}{4bv} \\ H_{n+1} &= \frac{2(av+2uw+u+w)+1}{2(2bv)} \end{aligned}$$

Le numérateur est impair et le dénominateur est donc pair.

EXERCICE 12. Démontrez par récurrence que pout tout entier naturel n, le nombre $3^{2n}-1$ est divisible par 8.

Solution. On considère le prédicat $P(n)$ suivant "$3^{2n}-1$ est divisible par 8". On a $P(0)$ puisque 0 est divisible par tout entier naturel. D'autre part,

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)} - 1 &= 9.3^{2n} - 1 \\ &= 9(3^{2n}-1) + 8 \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse de récurrence il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $3^{2n}-1 = 8k$, d'où

$$\begin{aligned} 3^{2(n+1)} - 1 &= 9(8k) + 8 \\ &= 8(9k+1) \end{aligned}$$

donc $3^{2(n+1)}-1$ est divisible par 8 et $P(n+1)$ est vrai.

EXERCICE 13. Démontrez la propriété suivante par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\} \quad 3^n + 4^n \leqslant 5^n.$$

Solution. On considère le prédicat $P(n)$ suivant : $3^n + 4^n \leqslant 5^n$. On a l'identité bien connue des maçons $3^2+4^2 = 5^2$ donc $P(2)$ est vrai. D'autre part,

$$\begin{aligned} 3^{n+1} + 4^{n+1} &= 3.3^n + 4.4^n \\ &\leqslant 5.3^n + 5.4^n \\ &\leqslant 5(3^n + 4^n) \\ &\leqslant 5.5^n \quad \text{d'après l'hypothèse de récurrence} \\ &\leqslant 5^{n+1} \end{aligned}$$

donc $P(n+1)$ est vrai.

EXERCICE 14. Une *grille* du loto est constituée de 6 numéros tous distincts choisis entre 1 et 49. Combien existe-t-il de grilles différentes ?

Solution. Une grille du loto est constituée de 6 valeurs à choisir dans l'intervalle $[\![1,49]\!]$, il s'agit donc d'un élément de l'ensemble $\mathscr{P}_6([\![1,49]\!])$ donc le cardinal est $\binom{49}{6}$.
NB. Attention, l'ordre des 6 numéros n'a pas d'importance, il ne fallait pas compter le nombre de sextuplets avec des valeurs distinctes de l'ensemble $[\![1,49]\!]^6$, sans quoi il y aurait $6\,!$ sextuplets pour coder une même grille, autant que de permutations des 6 valeurs dans le sextuplet.

EXERCICE 15. La carte d'un restaurant propose 3 entrées, 4 plats et 4 desserts. **(1)** Combien de menus différents constitués d'une entrée suivie d'un plat puis d'un dessert (menu *complet*) peut-on constituer ?

(2) Même question si le menu peut-être incomplet ?

Solution. (1) On considère les trois ensembles E, P et D contenant respectivement les 3 entrées, les 4 plats et les 4 desserts. Un menu complet peut donc être codé sous la forme d'un triplet (e,p,d) du produit cartésien $E\times P\times D$ dont le cardinal est $\#E.\#P.\#D = 48$.

(2) Si le client peut constituer son menu comme il l'entend, il peut être constitué d'un seul, de deux ou trois des éléments *entrée*, *plat*, *dessert*. Autrement dit, son menu est un élément de l'ensemble :

$$(\underset{3}{E}\sqcup \underset{4}{P}\sqcup \underset{4}{D})\sqcup((\underset{3\times 4}{E\times P})\sqcup(\underset{3\times 4}{E\times D})\sqcup(\underset{4\times 4}{P\times D}))\sqcup(\underset{3\times 4\times 4}{E\times P\times D}).$$

et ces 7 ensembles constituent une partition de l'ensemble des menus possibles, on peut donc en calculer le cardinal grâce à la formule de sommation :

$$3+4+4+12+12+16+48 = 99.$$

EXERCICE 16. Combien peut-on constituer de numéros de téléphone de 8 chiffres ne contenant pas 0 ?

Solution. La modélisation est très simple, chaque chiffre est à choisir dans l'ensemble $[\![1,9]\!]$ et un numéro de téléphone est donc un élément du produit cartésien $[\![1,9]\!]^8$ dont le cardinal est 9^8.

EXERCICE 17. † Un QCM contient 20 questions comportant chacune 4 choix. Combien de QCM différents peut-on produire en mélangeant les questions et les 4 réponses à l'intérieur de chaque question ?

Solution. Si on numérote les questions de 1 à 20, les changer de place dans le sujet se modélise par une permutation de l'ensemble $\mathfrak{S}_{20}$ des permutations à 20 éléments dont le cardinal est $20\,!$. Pour chacune d'entre elles, on peut également permuter les 4 réponses, il y a donc $4! = 24$ façons différentes de présenter les réponses d'une seule question. Un QCM est donc modélisé par un 21-uplet de l'ensemble

$$\mathfrak{S}_{20}\times(\mathfrak{S}_4)^{20}$$

dont le premier terme définit la position des 20 questions dans le sujet et i-ème terme suivant $i\in[\![2,21]\!]$ la position des 4 réponses possibles dans la question numéro $i-1$. Son cardinal est

$$20\,!\times 24^{20}.$$

EXERCICE 18. Le jeu du *Super Mastermind* se joue à deux. L'un des joueurs crée une *combinaison secrète* en plaçant des pions de couleur sur 5 cases alignées d'un plateau cachées derrière un paravent (voir fig 1). Dans chaque case, il peut ou non placer un pion de la couleur de son choix, il est donc possible de laisser les 5 cases vides ou de placer 5 pions de la même couleur. L'autre joueur, en face, doit deviner cette séquence en plaçant sa solution en face.

(1) Combien existe-t-il de combinaisons secrètes au *Mastermind* ?

(2) Même question si le joueur laisse deux positions vides ?

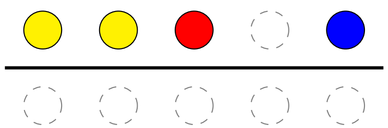

Figure 1. Combinaison secrète du *Super Mastermind* : deux pions jaunes, un rouge, une case vide et un pion bleu.

Solution. **(1)** On modélise aisément le contenu d'une case, par exemple avec un entier de l'intervalle $[\![0,8]\!]$, la valeur 0 codant l'absence de pion et les valeurs de 1 à 8 la couleur du pion. Une combinaison secrète est alors un élément du produit cartésien $[\![0,8]\!]^5$ de cardinal $9^5 = 59\,049$.

(2) Le calcul est plus compliqué, il faut trouver un ensemble dont les éléments codent toutes les combinaisons secrètes qui respectent la condition (deux positions vides). Pour construire une combinaison secrète qui respecte cette condition, il faut dans un premier temps choisir quelles sont les deux cases qui vont rester vides, ce que l'on peut coder par une partie à deux éléments de l'ensemble $[\![1,5]\!]$ si les positions des cases sont codées par les entiers de 1 à 5. L'ensemble $\mathscr{P}_2([\![1,5]\!])$ code donc tous les choix possibles pour les deux cases vides. Pour chacun de ces choix, il reste à choisir trois pions de couleur pour les 3 trois cases restantes. Comme la position des trois cases importe, leur contenu est modélisé par un triplet de valeurs de l'intervalle $[\![1,8]\!]$ codant les 8 couleurs possibles.

Une combinaison secrète est donc associée de manière unique à un élément de l'ensemble

$$\mathscr{P}_2([\![1,5]\!]) \times [\![1,8]\!]^3$$

dont le cardinal est

$$\binom{5}{2} 8^3 = 10 \times 512 = 5\,120.$$

EXERCICE 19. Un code de carte bancaire contient 4 chiffres décimaux.

(1) Combien peut-on constituer de codes différents ?

(2) Même question si les 4 chiffres sont différents ?

(3) Même question si deux chiffres au moins sont identiques ?

Solution. **(1)** Un code de carte bancaire à 4 chiffres peut être modélisé par un quadruplet de l'ensemble $C := [\![0,9]\!]^4$, il y a donc 10^4 codes possibles.

Version alternative : chaque code de carte $(c_1, c_2, c_3, c_4) \in C$ définit une application $c : [\![1,4]\!] \to [\![0,9]\!]$ par $c(i) := c_i$. Réciproquement, chaque application $c : [\![1,4]\!] \to [\![0,9]\!]$ définit un code $(c(1), c(2), c(3), c(4)) \in C$. On vient de construire une *bijection* $f : C \to [\![0,9]\!]^{[\![1,4]\!]}$ et par conséquent les ensembles C et $[\![0,9]\!]^{[\![1,4]\!]}$ ont le même cardinal et on retrouve le résultat $\#C = \#([\![0,9]\!]^{[\![1,4]\!]}) = 10^4$.

(2) Notons $D \subset C$ le sous-ensemble des codes tels que les 4 chiffres sont différents. Revenons à la bijection f entre les codes et les applications introduite dans la réponse précédente. Puisqu'il faut 4 chiffres différents, l'image $f(c_1, c_2, c_3, c_4)$ est une injection c et réciproquement une injection c définit un code de D. La restriction de f à D est donc une bijection de D dans l'ensemble des injections de $[\![1,4]\!]$ dans $[\![0,9]\!]$ dont le cardinal est $\frac{10!}{(10-4)!} = 5\,040$.

Version alternative : avec les mêmes notations, les 4 valeurs d'un quadruplet de D étant distinctes, elles définissent une partie à 4 éléments de $[\![0,9]\!]$ ainsi qu'une permutation de S_4 qui détermine la position des 4 valeurs dans le quadruplet. Réciproquement, une partie à 4 éléments de $[\![0,9]\!]$ et une permutation de S_4 déterminent un code de D. On a donc une bijection entre D et l'ensemble $\mathscr{P}_4([\![0,9]\!]) \times S_4$ dont le cardinal est $\binom{10}{4} \times 4\,! = 5\,040$.

(3) Deux chiffres *au moins* d'un code à 4 chiffres sont identiques si et seulement si les 4 chiffres du code ne sont pas tous différents. Autrement dit le sous-ensemble des codes tels que deux chiffres au moins sont identiques est le complémentaire $C \backslash D$ de l'ensemble D des codes dont les chiffres sont tous différents dans l'ensemble C de tous les codes possibles. Il est évident que D et $C \backslash D$ forment une partition de C, la formule de sommation nous donne l'égalité $\#C = \#D + \#(C \backslash D)$ de laquelle on déduit que $\#(C \backslash D) = \#C - \#D = 10^4 - 5\,040 = 4\,960$.

EXERCICE 20. **(1)** Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot *maths* (ces anagrammes sont quelconques, pas nécessairement des mots de la langue française) ?

(2) Combien y-a-t-il d'anagrammes *distinctes* du mot *arbre* ?

Solution. **(1)** Une anagramme d'un mot donné est obtenue par permutation des lettres de ce mot. Comme les lettres sont toutes distinctes, deux permutations distinctes donnent des anagrammes distinctes. Il suffit donc de compter le nombre de bijections d'un ensemble à 5 éléments, soit $5\,! = 120$.

(2) La situation est différente pour le mot *arbre* car il contient deux fois la lettre *r*. Nous allons proposer deux raisonnements différents pour mener à bien ce calcul. Pour comprendre le premier raisonnement, distinguons virtuellement les deux *r* comme s'il s'agissait de deux lettres distinctes en les baptisant r_1 et r_2. Dans ce cas les 120 permutations fournissent autant d'anagrammes différentes. Si on définit la relation binaire $\simeq$ entre anagrammes par $x \simeq y$ si les anagrammes x et y définissent le même mot (on ne fait plus le distinguo entre r_1 et r_2), il est aisé de vérifier que $\simeq$ est une relation d'équivalence et que chaque classe d'équivalence admet exactement deux anagrammes comme antécédents pour la surjection canonique, ce qui nous permet d'appliquer le principe des bergers et de conclure qu'il y a 60 anagrammes distinctes.

Version alternative : on choisit les deux positions où placer les deux lettres r, donc une paire de $\mathscr{P}_2([\![1,5]\!])$ où l'intervalle $[\![1,5]\!]$ code les positions des lettres d'une anagramme. Puis on place les 3 lettres restantes dans les trois positions libres $\{p_1,p_2,p_3\}$, ce qui se traduit par le choix d'une bijection entre $\{a,b,e\}$ et $\{p_1,p_2,p_3\}$, autrement dit, une permutation de $\mathfrak{S}_3$ en codant les 3 lettres et les 3 positions par des entiers de l'ensemble $\{1,2,3\}$. On construit donc une anagramme à partir d'un élément de l'ensemble

$$\mathscr{P}_2([\![1,5]\!]) \times \mathfrak{S}_3$$

dont le cardinal est

$$\binom{5}{2} 3\,! = 10 \times 6 = 60.$$

EXERCICE 21. Une *adresse* IP est constituée de 4 nombres non-nuls de 8 bits.

(1) Combien existe-t-il d'adresses IP distinctes ?

(2) Même question si les 4 nombres sont tous différents ?

(3) Même question s'il faut au plus 16 bits nuls ?

Solution. (1) On note $\mathscr{B} := \{0,1\}$ et $\mathscr{O} := \mathscr{B}^8$ l'ensemble des *octets* qui contient donc $2^8 = 256$ valeurs possibles. Une adresse IP est alors un quadruplet (o_1,o_2,o_3,o_4) de l'ensemble $\mathscr{O}^4$ qui contient 256^4 valeurs possibles.

(2) Chaque injection de $[\![1,4]\!]$ dans $\mathscr{O}$ définit exactement un quadruplet de valeurs distinctes de l'adresse IP (dit autrement, il y a une bijection entre l'ensemble de ces injections et les quadruplets de valeurs distinctes). Il suffit donc de dénombrer le nombre d'injections d'un ensemble à 4 éléments dans un ensemble à 256 éléments :

$$256 \times 255 \times 254 \times 253.$$

(3) On modélise dans ce cas une adresse IP comme un n-uplet de $8\times 4 = 32$ bits. Un registre d'au plus 16 bits nuls équivaut à un registre d'au moins 16 bits non-nuls. Pour constituer une telle adresse, il faut donc fixer 16 valeurs à 1 sur les 32 bits, les autres étant quelconques. On a donc $\binom{32}{16}$ façon différentes de fixer 16 bits à 1 et 2^{16} façons de remplir les 16 bits restants, soit au total $\binom{32}{16} \times 2^{16}$ adresses possibles.

EXERCICE 22. La classe de I23 comporte $f \geqslant 4$ filles et $g \geqslant 4$ garçons. On veut élire 4 représentants de la classe. Combien peut-on constituer de groupes différents de :

(1) 4 filles ?

(2) 4 étudiant-e-s ?

(3) 4 étudiant-e-s de même sexe ?

(4) 4 étudiant-e-s contenant au moins une fille et au moins un garçon ?

Solution. On définit F l'ensemble des filles et G l'ensemble des garçons.

(1) On choisit 4 filles parmi les f filles, autrement dit un élément de l'ensemble $\mathscr{P}_4(F)$ dont le cardinal est $\binom{f}{4}$.

(2) On choisit 4 étudiant-e-s parmi les étudiant-e-s, autrement dit un élément de l'ensemble $\mathscr{P}_4(F \sqcup G)$ de cardinal $\binom{f+g}{4}$.

(3) On choisit 4 filles parmi f filles ou 4 garçons parmi g garçons, autrement dit un élément de $\mathscr{P}_4(F) \sqcup \mathscr{P}_4(G)$ de cardinal $\binom{f}{4} + \binom{g}{4}$.

(4) Il faut donc constituer un groupe de 4 étudiant-e-s qui ne sont pas du même sexe, qui vit dans le complémentaire de l'ensemble des groupes d'étudiants de même sexe déterminé dans la question précédente, i.e. un élément de l'ensemble $\mathscr{P}_4(F \sqcup G)\backslash(\mathscr{P}_4(F) \sqcup \mathscr{P}_4(G))$. La formule de sommation sur la partition formée par une partie et son complémentaire nous permet de prouver que son cardinal est $\binom{f+g}{4} - (\binom{f}{4} + \binom{g}{4})$.

EXERCICE 23. † On constitue une *main* avec 5 cartes d'un jeu de 32 cartes contenant 8 cartes pour chacune des 4 couleurs : *trèfle* $\clubsuit$, *carreau* $\diamondsuit$, *cœur* $\heartsuit$ et *pique* $\spadesuit$. Combien peut-on constituer de mains différentes ? Combien peut-on constituer de mains différentes contenant *exactement* :

(1) une quinte flush (5 valeurs consécutives de même couleur) ?

(2) une quinte (5 valeurs consécutives pas de même couleur) ?

(3) un carré (4 cartes de même valeur) ?

(4) une paire (2 cartes de même valeur) ?
(5) deux paires de valeurs différentes ?
(6) une couleur ? (5 cartes de valeurs différentes mais de même couleur) ?
(7) un brelan (3 cartes de même valeur uniquement) ?
(8) un full (un brelan et une paire) ?

Solution. Pour constituer une main de 5 cartes, il faut en choisir 5 parmi 32 et l'ordre n'a pas d'importance. Le nombre M de mains est donc

$$M = \binom{32}{5} = 172\,608.$$

(1) Il n'y a que 4 suites possibles et 4 couleurs possibles pour chacune d'entre-elles. Le nombre $\pentagon_F$ de quinte flush est donc égal à :

$$\pentagon_F = 4 \times 4 = 16.$$

(2) Il n'y a que 4 suites de valeurs : $7 \to V$, $8 \to D$, $9 \to R$ et $10 \to A$, leurs couleurs sont quelconques mais ne peuvent être toutes égales sans quoi il s'agit d'une quinte flush. On note $\pentagon$ le nombre de quintes et $\pentagon_F$ le nombre de quintes flush :

$$\pentagon = 4 \times 4^5 - \underbrace{16}_{\pentagon_F} = 4\,080.$$

(3) Comme il y a 8 valeurs différentes, on peut constituer 8 carrés différents et pour chacun d'entre eux, compléter par une carte quelconque choisie parmi les $32 - 4 = 28$ cartes restantes puisqu'on ne peut pas constituer de meilleure main (la quinte flush) en complétant un carré. Le nombre $\square$ de mains avec un carré est donc égal à

$$\square = \underbrace{8}_{\text{carré}} \times \underbrace{28}_{\text{carte 5}} = 224.$$

(4) On peut constituer $\binom{4}{2} = 6$ paires pour chacune des 8 valeurs, soit 48 paires différentes. On ne peut pas compléter un carré pour en faire une suite, une couleur ou une quinte flush puisque cela supposerait que les valeurs soient toutes différentes, mais il ne faut pas non plus constituer une nouvelle paire, un brelan un full ou un carré. Les valeurs des trois cartes restantes doivent donc être différentes entre elles et de celle de la paire déjà constituée. On choisit donc trois valeurs différentes parmi les 7 qui restent soit $\binom{7}{3}$ puis une couleur arbitraire pour chacune de ces trois cartes, soit 4^3 possibilités. Finalement le nombre P_S de paires simple est donné par

$$P_S = \underbrace{8 \times \binom{4}{2}}_{\text{paire}} \times \underbrace{\binom{7}{3} \times 4^3}_{\text{cartes 3,4 et 5}} = 8 \times 6 \times 35 \times 64 = 107\,520.$$

(5) Pour une valeur donnée, on a vu en (4) que l'on pouvait constituer $(\binom{4}{2} = 6$ paires. On peut constituer la première de $8 \times \binom{4}{2}$ façons différentes et la seconde de $7 \times \binom{4}{2}$ puisque sa valeur ne peut être la même. La dernière carte doit avoir une valeur différente des deux paires pourne pas constituer un brelan, il reste donc 6 valeurs différentes et 4 couleurs possibles, soit $6 \times 4 = 24$ façons de compléter la main. Le nombre P_D de doubles paires distintes est donc

$$P_D = \underbrace{(8 \times \binom{4}{2})}_{\text{paire 1}} \times \underbrace{(7 \times \binom{4}{2})}_{\text{paire 2}} \times \underbrace{(6 \times 4)}_{\text{carte 5}} = 48\,384.$$

(6) Pour chacune des 4 couleurs, il faut choisir 5 cartes parmi 8 soit $\binom{8}{5}$ possibilités et donc $4 \times \binom{8}{5}$ main de même couleur. Cependant il faut retirer de ces mains toutes celles qui sont des suites sinon il s'agit d'une quinte flush. En notant $\pentagon_F$ le nombre de quintes flush que nous calculerons plus bas, et C le nombre de couleurs, nous avons donc :

$$C = 4 \times \binom{8}{5} - \pentagon_F.$$

(7) Il y a 8 valeurs possibles pour fixer la valeur commune aux trois cartes et il faut choisir 3 des 4 couleurs, ce qui laisse $8 \times \binom{4}{3} = 32$ possibilités. Pour chacune de ces possibilités, il faut fixer la valeur des 2 dernière cartes qui ne doivent pas former un carré ou un full avec les trois premières cartes. Leurs valeurs doivent donc être distinctes et ne peuvent être celle du brelan, il faut donc en choisir 2 parmi $8 - 1 = 7$ soit $\binom{7}{2}$, leurs couleurs sont en revanche quelconques, il y en a donc 4^2 ce qui fait $\binom{7}{2} \times 4^2$ compléments de deux cartes possibles pour chaque groupe de trois cartes identiques. Si l'on note B le nombre de brelans possibles, on a :

$$B = \underbrace{8 \times \binom{4}{3}}_{\text{brelan}} \times \underbrace{\binom{7}{2} \times 4^2}_{\text{cartes 4 et 5}} = 10\,752.$$

(8) À la question précédente, nous avons vu que l'on pouvait former $8 \times \binom{4}{3}$ brelans et cette fois il faut compléter par une paire. Pour ne pas constituer un carré avec deux des cartes du brelan, la valeur de la paire doit être différente de celle du brelan mais leurs couleurs sont quelconques, on a donc $7 \times \binom{4}{2}$. En notant F le nombre de full, on a :

$$F = \underbrace{8 \times \binom{4}{3}}_{\text{brelan}} \times \underbrace{7 \times \binom{4}{2}}_{\text{paire}} = 1\,344.$$

EXERCICE 24. † Quatre pigeons et 2 moineaux se posent côte à côte sur un cable. On suppose que l'on ne peut pas différencier les pigeons entre eux ni les moineaux.

(1) Combien y-a-t-il de dispositions possibles ?

(2) Même question avec les pigeons d'un côté et les moineaux de l'autre ?

(3) Même question si chaque moineau est entre deux pigeons ?

(4) Même question si les moineaux sont côte à côte ?

Solution. **(1)** Si l'on considère que chaque oiseau doit se placer sur le cable, il y a 6 emplacement possibles et les pigeons doivent en choisir 4, les autres étant dévolues aux moineaux et il y en a $\binom{6}{4} = 15$. Notons que l'on pouvait raisonner symétriquement avec les moineaux, soit $\binom{6}{2} = 15$.

(2) La réponse est évidemment 2.

(3) On imagine que les 4 pigeons sont déjà placés et que chacun des 2 moineaux doit s'intercaler entre 2 pigeons. Il y a trois emplacements possibles, donc $\binom{3}{2} = 3$.

(4) Même raisonnement qu'en (3), mais cette fois il y a 5 emplacements, et les deux moineaux doivent choisir l'un des d'entre eux, soit $\binom{5}{1} = 5$.

EXERCICE 25. Démontrez que le nombre de p-uplets strictement ordonnés d'un ensemble totalement ordonné X à n éléments est égal à $\binom{n}{p}$, le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

Solution. Comme X est un ensemble fini et ordonné, on peut considérer que ses éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sont numérotés de manière à être ordonnés, i.e.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \quad i < j \Rightarrow x_i < x_j.$$

Pour constituer un p-uplet ordonné, il suffit de choisir p positions parmi n qui déterminent les indices des x_i constituant un p-uplet ordonné. Il y en a donc $\binom{n}{p}$.

EXERCICE 26. Formalisez et démontrez le *principe des tiroirs* : si n caleçons sont rangées dans m tiroirs (peu importe dans quel ordre) avec $n > m$, un tiroir contient au moins 2 caleçons.

Solution. On définit l'ensemble C de n caleçons et l'ensemble T de m tiroirs. Le rangement des n caleçons peut se modéliser comme une application $r : C \to T$. Nous savons que si $n > m$ alors r n'est pas injective, dans ce cas il existe c et c' tels que $r(c) = r(c')$, autrement dit un tiroir qui contient au moins deux caleçons.

EXERCICE 27. De combien de façons différentes peut-on empiler 8 tee-shirts sur une étagère ?

Solution. On numérote les tee-shirts et leur niveaux de 1 à 8. Chaque empilement des tee-shirts définit une application bijective $n : [\![1,8]\!] \to [\![1,8]\!]$ que l'on interprète par le tee-shirt numéro k est au niveau $n(k)$. On sait que $\mathfrak{S}_8 = 8!$.

EXERCICE 28. Soit p et n deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$. Démontrez les identités suivantes :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}, \qquad \binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

Solution. La première égalité est immédiate :

$$\begin{aligned}\binom{n}{p} &= \frac{n\,!}{p\,(n-p)\,!}\\ &= \frac{n\,!}{(n-(n-p))\,!(n-p)\,!} = \binom{n}{n-p}\end{aligned}$$

Pour l'autre :

$$\begin{aligned}\binom{n}{p}+\binom{n}{p+1} &= \frac{n\,!}{p\,!(n-p)\,!}+\frac{n\,!}{(p+1)\,!(n-(p+1))\,!}\\ &= \frac{n\,!(p+1)}{(p+1)p\,!(n-p)\,!}+\frac{n\,!(n-p)}{(p+1)\,!(n-(p+1))\,!(n-p)}\\ &= \frac{n\,!(n+1)}{(p+1)\,!((n+1)-(p+1))\,!}\\ &= \frac{(n+1)\,!}{(p+1)\,!((n+1)-(p+1))\,!} = \binom{n+1}{p+1}\end{aligned}$$

EXERCICE 29. Pourquoi le triangle de Pascal permet-il de calculer plus efficacement des coefficients binomiaux qu'en calculant le quotient de la formule ci-dessous ?

$$\binom{n}{p} = \frac{n\,!}{p\,!(n-p)\,!}$$

Solution. Parce que la construction des coefficients binomiaux successifs se fait uniquement à l'aide d'additions et qu'aucune valeur intermédiaire ne dépasse jamais la valeur finale.

EXERCICE 30. Soit n un entier naturel.

(1) Quels sont les coefficients du polynôme $(X+1)^n$?

(2) Développez l'expression $(x-y)^6$.

Solution. **(1)** On rappelle la formule du binôme de Newton :

$$(X+Y)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}x^{n-p}y^p.$$

On remplace Y par 1 et on obtient

$$(X+1)^n = \sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}X^{n-p}.$$

ce qui montre que les coefficients de ce polynôme sont les coefficients binomiaux.

(2) On construit les coefficients binomiaux à l'aide du triangle de Pascal pour $n=6$ et on obtient :

$$(x-y)^6 = x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6.$$

EXERCICE 31. Soit p et n deux entiers tels que $0 \leqslant p \leqslant n$.

(1) Démontrez que si $p \geqslant 1$ alors on a l'égalité suivante, appelée *formule du pion* :

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

(2) Puis en déduire que

$$\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p} = n2^{n-1}.$$

Solution. On a

$$\begin{aligned}p\binom{n}{p} &= \frac{\boldsymbol{p}\,n!}{(n-p)!\,\boldsymbol{p}(p-1)!}\\ &= \frac{n(n-1)!}{(n-p)!\,(p-1)!}\\ &= n\frac{(n-1)!}{(n-1-(p-1))!\,(p-1)!}\\ &= n\binom{n-1}{p-1}.\end{aligned}$$

Et par conséquent

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{n} p\binom{n}{p} &= \sum_{p=1}^{n} n\binom{n-1}{p-1}\\ &= n\sum_{p=1}^{n}\binom{n-1}{p-1}\\ &= n2^{n-1}.\end{aligned}$$

EXERCICE 32. † On considère la fonction $P(X) := (X^{n+1} - 1)/(X - 1)$.
(1) Soit $Q(X) := 1+X+X^2+\cdots+X^{n-1}+X^n$. Vérifiez que $Q(X) = P(X)$ pour $X \neq 1$. Indication : multipliez $Q(X)$ par X et retrouvez $Q(X)$ dans cette nouvelle expression.
(2) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. En calculant le polynôme dérivé $P'(X)$ de deux façons différentes, calculez la somme

$$S := \sum_{k=1}^{n} kq^k. \tag{8}$$

Solution. **(1)** On vérifie aisément que $X.Q(X) = Q(X) + (X^{n+1} - 1)$ d'où l'on tire $Q(X)(X - 1) = X^{n+1} - 1$ ce qui permet de conclure.
(2) En partant de la première expression de $P(X)$, on obtient

$$\begin{aligned} P'(X) &= \frac{(n+1)X^n(X-1) - (X^{n+1}-1)}{(X-1)^2} \\ &= \frac{X^n\big(n(X-1)-1\big)+1}{(X-1)^2} \end{aligned}$$

et en partant de la seconde $Q(X)$, on obtient

$$P'(X) = 1 + 2X + 3X^2 + \cdots + (n-1)X^{n-2} + nX^{n-1}$$

$$\text{donc} \quad XP'(X) = \sum_{k=1}^{n} kX^k.$$

On en déduit que $S = qP'(q)$ d'où

$$S = \frac{q^{n+1}\big(n(q-1)-1\big)+q}{(q-1)^2}$$