

Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I23.

TD 4. Relations, applications¹

EXERCICE 1. Considérons les trois ensembles

$$C := \{R, V, B\}, \quad V := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad G := \{(R, 2), (V, 5), (B, 7)\}.$$

1. Comment qualifie-t-on les éléments de G ?
2. De quel ensemble G est-il un sous-ensemble?
3. Dessinez le **diagramme sagittal** de la **correspondance** $c := (C, G, V)$.
4. Est-ce une **fonction**, une **application**?

- Solution. 1.** Les éléments de G sont des *couples*.
2. L'ensemble G est un sous-ensemble de $C \times V$.
3. Le diagramme sagittal est représenté en figure (1).

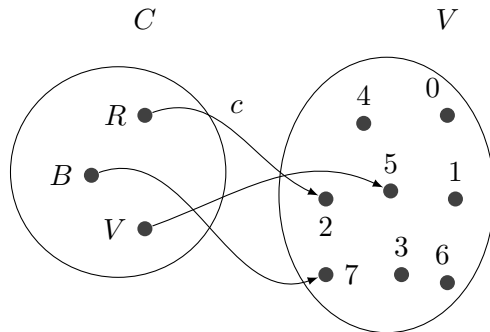


FIGURE 1. Diagramme sagittal de la correspondance c .

4. C'est une fonction puisqu'il n'y jamais plus d'une flèche qui part d'un élément de l'ensemble de départ et c'est également une application car chaque élément de l'ensemble de départ a une image, ou dit autrement, le domaine de définition de cette correspondance est l'ensemble C tout entier.

¹ version du 21 mars 2023, 19 : 11

EXERCICE 2. On considère la correspondance c dont le diagramme sagittal est représenté en figure (2).

1. Écrivez l'ensemble de départ, d'arrivée et le graphe de c en extension.
2. S'agit-il d'une fonction ? D'une application ?
3. Dessinez le diagramme sagittal de la correspondance réciproque.

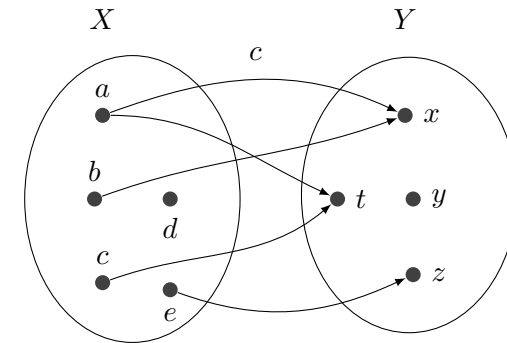


FIGURE 2. Diagramme sagittal de la correspondance c

Solution. 1. On a les ensembles suivants :

$$X = \{a, b, c, d, e\}, \quad Y = \{x, y, z, t\}, \quad G = \{(a, x), (a, t), (b, x), (c, t), (e, z)\}.$$

2. Il ne s'agit pas d'une fonction puisque deux flèches partent de a et a fortiori pas une application.
3. Le diagramme sagittal de c^{-1} est représenté en figure (3).

EXERCICE 3. Écrivez la définition de la correspondance réciproque d'une correspondance $c = (X, G, Y)$.

Solution. On a $c^{-1} = (Y, G^{-1}, X)$ où $G^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in G\}$.

EXERCICE 4. † Soit X un ensemble non-vidé et $f : X \times X \rightarrow \mathcal{P}(X)$ l'application définie par $f(x, y) := \{x, y\}$ (Il s'agit d'un abus de notation, en toute rigueur on devrait écrire $f((x, y))$).

1. Dessinez le diagramme sagittal de cette application dans le cas particulier où $X := \{x, y, z\}$.

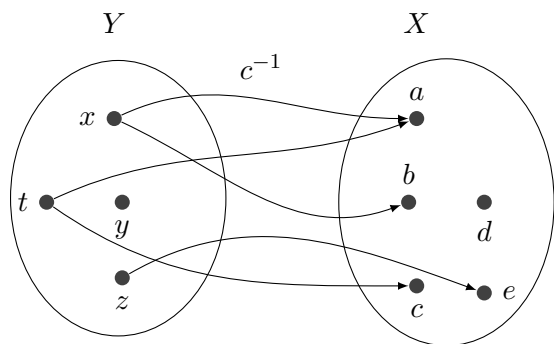


FIGURE 3. Diagramme sagittal de la correspondance c^{-1}

2. Dans le cas général, cette application est-elle **injective**? **Surjective**? Justifiez votre réponse.

Solution. 1. Le diagramme sagittal de cette application est présenté en figure (4).

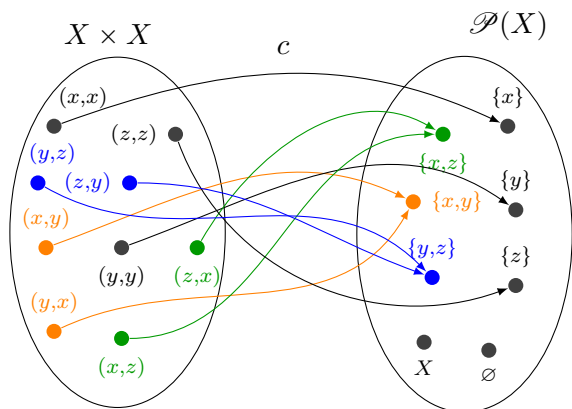


FIGURE 4. Diagramme sagittal de l'application f .

2. Il faut traiter le cas particulier où l'ensemble X est un singleton $\{x\}$. Dans ce cas $X \times X = \{(x, x)\}$ et $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{x\}\}$. On a une seule image $f(x, x) = \{x, x\} = \{x\}$ et l'application f est nécessairement injective. Elle n'est en revanche pas surjective car \emptyset n'a pas d'antécédent. Les images

réciroques sont $f^{-1}(\{x\}) = (x, x)$ et $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.

Dans tous les autres cas, l'application f n'est pas injective puisque deux éléments distincts n'ont pas nécessairement des images distinctes :

$$\forall (x, y) \in X \times X \quad f(x, y) = f(y, x) = \{x, y\}.$$

Elle n'est pas non plus surjective car seuls les singletons et les paires de $\mathcal{P}(X)$ admettent un antécédent, i.e.

$$\begin{aligned} \forall x \in X \quad f^{-1}(\{x\}) &= \{(x, x)\} \\ \forall (x, y) \in X \times X \quad f^{-1}(\{x, y\}) &= \{(x, y), (y, x)\} \\ \forall A \in \mathcal{P}(X) \quad \#A \geq 3 &\Rightarrow f^{-1}(A) = \emptyset \end{aligned}$$

EXERCICE 5. Soit X un ensemble, $(A, B) \in (\mathcal{P}(X))^2$ avec $A \neq \emptyset$ et $A \neq X$. Soit f et g deux applications de $\mathcal{P}(X)$ dans $\mathcal{P}(X)$ définies par

$$f(B) := A \cup B, \quad g(B) = A \cap B.$$

Ces applications sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

Solution. Comme $A \neq \emptyset$, alors il existe $x \in X$ tel que $x \in A$, d'autre part comme $A \neq X$, il existe un élément $y \in X$ tel que $y \notin A$. Il est évident que $f(\{x, y\}) = A \cup \{x, y\} = A \cup \{y\} = f(\{y\})$, l'application f n'est donc pas injective. Elle n'est pas non plus surjective, en effet la partie $\{y\}$ n'admet pas d'antécédent puisque $f(B)$ contient nécessairement x . Cette application n'est donc pas bijective.

On reprend les notations x et y ci-dessus pour désigner deux éléments de X tels que $x \in A$ et $y \notin A$. Il est évident que $g(\{x, y\}) = \{x\} = g(\{x\})$, la fonction g n'est donc pas injective. Elle n'est pas non plus surjective. Le singleton $\{y\}$ n'admet pas d'antécédent puisque tous les éléments de $A \cap B$ sont des éléments de A . Cette application n'est donc pas bijective.

EXERCICE 6. Soit X l'ensemble des étudiants de I23 et $\mathcal{A} := \{a, b, \dots, z\}$ l'alphabet latin. L'application $f : X \rightarrow \mathcal{A}$ qui à tout étudiant associe la première lettre de son nom de famille est-elle injective ?

Solution. Cela dépend du nombre d'étudiants en I23 et de leurs noms de famille. Si leur nombre est inférieur ou égal au nombre de lettres de l'alphabet, il est possible que les initiales de leurs noms de famille soient

distinctes. Dans le cas contraire la réponse est non, ce qui est formalisé dans [cette proposition](#).

EXERCICE 7. Les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente de \mathbb{R} sont-elles des applications ? Si oui sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Quels ensembles de départ et/ou d'arrivée considérer pour qu'elles vérifient ces propriétés ?

Solution. Afin de mieux comprendre les réponses, on représente le graphe de ces fonctions trigonométriques dans la figure 5.

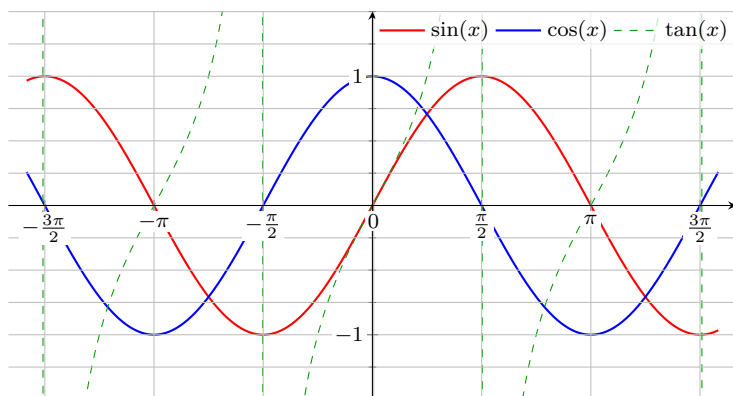


FIGURE 5. Graphes des fonctions trigonométriques.

Comme on considère initialement que ces trois fonctions ont pour ensemble de départ et d'arrivée \mathbb{R} , il faut trouver leurs ensembles de définition. Les fonctions sinus et cosinus sont définies partout mais pas la fonction tangente puisque $\tan x = \sin x / \cos x$ et que la fonction cosinus s'annule en tout point $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit,

$$\mathcal{D}_{\cos} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{D}_{\sin} = \mathbb{R}, \quad \mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} \right).$$

En changeant les ensembles de départ, nous disposons à présent d'applications. Aucune des trois n'est injective puisqu'elles sont toutes les trois périodiques, de période 2π pour les deux premières et de période π pour la tangente, il y a donc une infinité de valeurs qui ont la même image. Même en restreignant les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle ne

couvrant qu'une période, elles ne sont toujours pas injectives. En revanche la fonction tangente devient injective sur l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui couvre bien une période.

Nous savons qu'en remplaçant l'ensemble d'arrivée d'une application par l'image de cette application elle devient surjective. Les fonctions sinus et cosinus ne sont pas surjectives si leur ensemble d'arrivée est \mathbb{R} , mais le deviennent sur l'intervalle $[-1, 1]$. La fonction tangente est en revanche surjective dans tous les cas.

EXERCICE 8. Soit X, Y et Z trois ensembles et $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux applications.

1. Démontrez que $g \circ f$ peut-être injective (resp. surjective) sans que g le soit. Montrez que $g \circ f$ ne peut-être injective si f ne l'est pas.
2. Démontrez que $g \circ f$ peut-être surjective sans que f le soit. Montrez que $g \circ f$ ne peut-être surjective si g ne l'est pas.

Solution. On considère les fonctions f et g du diagramme sagittal de la figure 6.

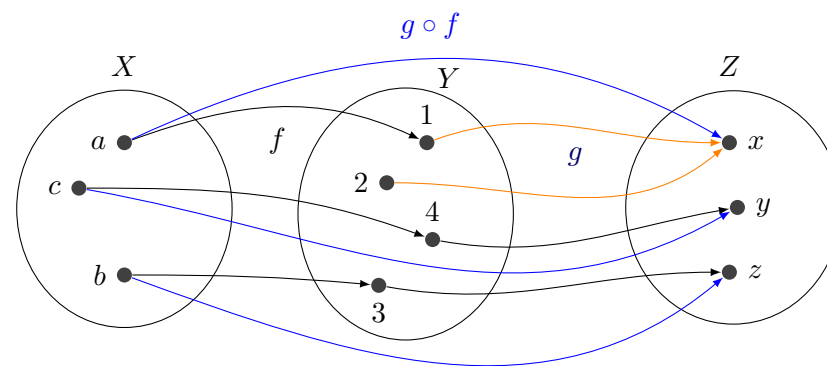


FIGURE 6. Diagramme sagittal de f, g et $g \circ f$.

L'application g n'est pas injective puisque $g(1) = g(2)$ alors que l'application $g \circ f$ l'est. Si f n'est pas injective, alors il existe deux éléments x

et y distincts tels que $f(x) = f(y)$ et dans ce cas $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(f(y)) = (g \circ f)(y)$ prouvant ainsi que $g \circ f$ n'est pas injective.

L'application $g \circ f$ est bien surjective puisque x, y et z ont respectivement pour antécédents a, c et b et pourtant f ne l'est pas puisque 2 n'a pas d'antécédent. Si g n'est pas surjective alors il existe $z \in Z$ tel que $\forall y \in Y, g(y) \neq z$, mais pour tout élément x de X , $f(x) \in Y$, donc $\forall x \in X, g(f(x)) \neq z$ soit $(g \circ f)(x) \neq z$ et z n'a pas donc pas d'antécédent dans X .

EXERCICE 9. † Soit \mathcal{C} le cercle de rayon R et de centre C du plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

1. Définissez formellement la correspondance c de graphe \mathcal{C} .
2. Dans un repère orthonormé, tracez les graphes G_c et $G_{c \circ c}$ des correspondances c et $c \circ c$ pour le centre $C := (0, 0)$ et le rayon $R := 1$.

Solution. 1. Si l'on note $C = (a, b)$, il s'agit de la correspondance $c = (\mathbb{R}, G, \mathbb{R})$ dont le graphe est défini par $G := \mathcal{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid d((x, y), (a, b)) = R\}$.

2. Il faut remarquer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par x coupe le cercle en deux points d'ordonnées y et y' , donc $(x, y) \in G_c$ et $(x, y') \in G_c$. Il faut ensuite chercher les ordonnées des points d'intersection entre les droites parallèles à l'axe des ordonnées passant par y et y' soit x et $-x$. On a donc $(y, x) \in G_c$ et $(y, -x) \in G_c$ d'où $(x, x) \in G_{c \circ c}$ et $(x, -x) \in G_{c \circ c}$. On obtient pour $G_{c \circ c}$ le **graphe en croix** en faisant varier x dans $[-1, 1]$.

EXERCICE 10. [‡] Soit A et B deux parties non-vides d'un ensemble E non-vide. On définit $f : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ par $f(X) := (X \cap A, X \cap B)$.

1. Démontrez que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.
2. Démontrez que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Solution. 1. Plutôt que montrer l'implication directe, montrons la contraposée. On suppose donc $A \cup B \neq E$ et il faut montrer que f n'est pas injective. Comme A et B sont des parties de E alors il existe un élément x de E qui n'appartient pas à la réunion $A \cup B$, donc $x \notin A$ et $x \notin B$. Dans ce cas le singleton $\{x\}$ et l'ensemble vide \emptyset ont la même image (\emptyset, \emptyset) par f prouvant que f n'est pas injective.

Réciproquement montrons que si $A \cup B = E$ alors f est injective. Soit

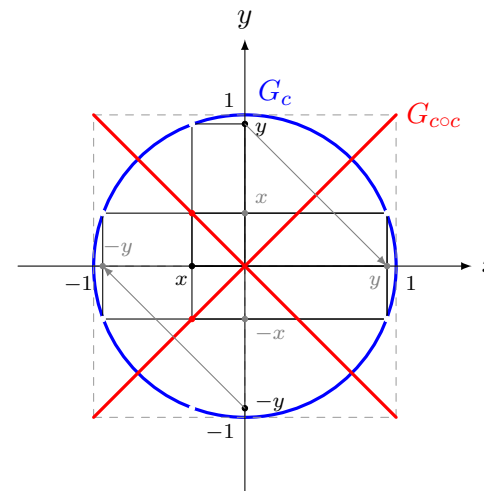


FIGURE 7. **Graphe de c et graphe de $c \circ c$.**

X et Y deux parties de E telles que $f(X) = f(Y)$. On en déduit que $A \cap X = A \cap Y$ et $B \cap X = B \cap Y$ et donc que

$$(A \cap X) \cup (B \cap X) = (A \cap Y) \cup (B \cap Y)$$

$$(A \cup B) \cap X = (A \cup B) \cap Y \quad \text{distributivité}$$

$$E \cap X = E \cap Y \quad \text{car } A \cup B = E$$

$$X = Y$$

2. Là encore, au lieu de montrer l'implication directe, montrons la contraposée, c'est-à-dire que si $A \cap B \neq \emptyset$ alors f n'est pas surjective. Si on suppose que $A \cap B \neq \emptyset$ alors il existe $x \in A \cap B$. Montrons que le couple $(\{x\}, \emptyset)$ n'admet pas d'antécédent. Si $X \cap \{x\} = \{x\}$ alors X contient nécessairement x donc $x \in X \cap B$ et $X \cap B \neq \emptyset$.

Réciproquement, si $A \cap B = \emptyset$ montrons que tout couple (U, V) de $\mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$ admet un antécédent X . Il suffit de considérer $X := U \cup V$:

$$\begin{aligned} (U \cup V) \cap A &= (U \cap A) \cup (V \cap A) & B \cap (U \cup V) &= (B \cap U) \cup (B \cap V) \\ &= U \cup \emptyset & &= \emptyset \cup V \\ &= U & &= V \end{aligned}$$

EXERCICE 11. Exprimez formellement qu'une correspondance n'est pas fonctionnelle en écrivant la négation de :

$$\forall x \in X \quad \forall (y, z) \in Y \times Y \quad ((x, y) \in G \wedge (x, z) \in G) \Rightarrow y = z. \quad (1)$$

Réécrivez la définition d'une fonction en remplaçant cette proposition par sa contraposée.

Solution. La négation de la proposition (1) est :

$$\exists x \in X \quad \exists (y, z) \in Y \times Y \quad ((x, y) \in G \wedge (x, z) \in G) \wedge (y \neq z).$$

La contraposée de la proposition (1) est (on applique De Morgan à la conjonction) :

$$\forall x \in X \quad \forall (y, z) \in Y \times Y \quad y \neq z \Rightarrow ((x, y) \notin G \vee (x, z) \notin G).$$

EXERCICE 12. Soit f et g les deux applications définies par les diagrammes sagittaux de la figure 8.

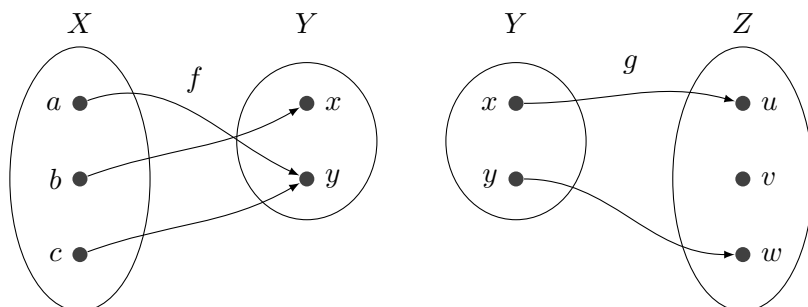


FIGURE 8. Diagrammes sagittaux des applications f et g .

1. Écrivez les graphes G_f et G_g des deux applications f et g respectivement en extension.
2. Ces applications sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
3. Dessinez le diagramme sagittal de la composition $g \circ f$ de ces deux applications et écrivez son graphe $G_{g \circ f}$ en extension.
4. L'application $g \circ f$ est-elle injective, surjective, bijective ?
5. La correspondance réciproque de $g \circ f$ est-elle une fonction ? Une application ?

Solution. 1. On a $G_f = \{(a, y), (b, x), (c, y)\}$ et $G_g = \{(x, u), (y, w)\}$.

2. L'application f n'est pas injective car $f(a) = f(c)$, elle est en revanche surjective puisque x et y ont tout deux au moins un antécédent. L'application g est injective car les éléments de Y ont des images distinctes dans Z mais n'est pas surjective car v n'admet pas d'antécédent. Ni l'une n'est l'autre ne peut donc être bijective.

3. Le diagramme sagittal de $g \circ f$ est en figure (9).

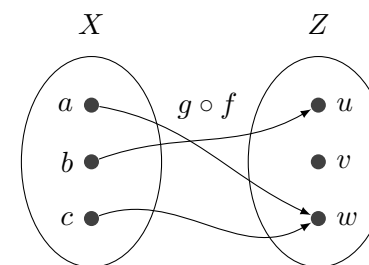


FIGURE 9. Diagramme sagittal de l'application $g \circ f$.

On a $G_{g \circ f} = \{(a, w), (b, u), (c, w)\}$.

4. L'application ne peut-être surjective ni injective (cf. exercice 8).
5. La correspondance réciproque ne peut être une fonction puisque $g \circ f$ n'est pas injective.

EXERCICE 13. † Soit $\mathcal{B} := \{0, 1\}$ muni de sa structure d'algèbre de Boole. Soit X un ensemble quelconque et A et B deux parties de X . On définit la *fonction indicatrice* de A notée $1_A : X \rightarrow \mathcal{B}$ par

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Que peut-on dire des ensembles A et B si $1_A = 1_B$?
2. Exprimez la fonction indicatrice du complémentaire de A dans X , de $A \cap B$, de $A \cup B$ et de $A \Delta B$ à l'aide des fonctions indicatrices de A et B .
3. Soit $f : X \rightarrow Y$ et C une partie de Y . De quel ensemble la fonction $1_C \circ f$ est-elle la fonction indicatrice ?

4. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $(X_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket}$ une **partition** de X . Montrez que

$$\sum_{i=1}^n 1_{X_i} = 1_X.$$

Solution. 1. Si $1_A = 1_B$ alors $A = B$. En effet, supposons que $1_A = 1_B$ et montrons que $(A \subseteq N) \wedge (B \subseteq A)$ (cf. une **axiome d'extension**). Soit $x \in A$, alors $1_A(x) = 1$ et par transitivité de l'égalité $1_B(x) = 1$ puisque les deux fonctions 1_A et 1_B sont supposées égales, ce qui prouve que $x \in B$. Le raisonnement est identique pour l'autre inclusion.

2. Ces indicatrices vérifient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} 1_{X \setminus A}(x) &= \overline{1_A(x)} \\ 1_{A \cap B}(x) &= 1_A(x) \cdot 1_B(x) \\ 1_{A \cup B}(x) &= 1_A(x) + 1_B(x) \\ 1_{A \Delta B}(x) &= 1_A(x) \oplus 1_B(x) \end{aligned}$$

3. Il s'agit de l'ensemble $f^{-1}(C)$. En effet, $1_C \circ f(x) = 1$ si $f(x) \in C$ soit $x \in f^{-1}(C)$.

4. On considère le prédicat $P(k)$ défini par :

$$1_{X_1 \sqcup \dots \sqcup X_k} = \sum_{i=1}^k 1_{X_i}.$$

La proposition $P(2)$ est vraie d'après la question (2). Montrons que pour tout entier $k \in \llbracket 2, n-1 \rrbracket$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. On a

$$\begin{aligned} 1_{X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_{k+1}} &= 1_{X_1 \sqcup X_2 \sqcup \dots \sqcup X_{k-1} \sqcup (X_k \sqcup X_{k+1})} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} 1_{X_i} + 1_{X_k \sqcup X_{k+1}} && \text{hypothèse de récurrence} \\ &= \sum_{i=1}^{k-1} 1_{X_i} + 1_{X_k} + 1_{X_{k+1}} && \text{d'après (2)} \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} 1_{X_i} \end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve.

EXERCICE 14. Écrivez le domaine de définition \mathcal{D}_f d'une fonction $f : X \rightarrow Y$ de graphe G_f en compréhension. Comment qualifie-t-on l'écriture

$$\mathcal{D}_f = \{\text{glace, alcool, cinéma, smartphone, livre}\}. \quad (2)$$

de l'ensemble \mathcal{D}_f ?

Solution. On a $\mathcal{D}_f := \{x \in X \mid \exists y \in Y \ (x, y) \in G_f\}$ et l'écriture (2) est une écriture en extension.

EXERCICE 15. La fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par $x \mapsto x^2$ est-elle une application ? Si oui, est-elle injective, surjective ? Sa correspondance réciproque est-elle une fonction ?

Solution. Par construction, il s'agit bien d'une application. Elle n'est pas injective puisque deux réels opposés x et $-x$ ont la même image $(-x)^2 = x^2$. Elle n'est pas non plus surjective puisqu'aucun réel négatif n'est un carré. La correspondance réciproque f^{-1} n'est pas une fonction puisque f n'est pas injective. Attention, l'application racine carrée $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ n'est *pas* l'application réciproque de f mais de l'application $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ qui coïncide avec f sur \mathbb{R}_+ .

EXERCICE 16. † Soit $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow Z$ deux bijections. Démontrez que

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

Quelle est la nature de la preuve qui permet de généraliser ce résultat à la composition de n applications f_1, f_2, \dots, f_n où pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, $f_i : X_i \rightarrow Y_i$ avec $Y_i = X_{i+1}$:

$$(f_n \circ f_{n-1} \circ \dots \circ f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ \dots \circ f_{n-1}^{-1} \circ f_n^{-1}.$$

Solution. Il faut montrer que

$$\forall z \in Z \quad (g \circ f)^{-1}(z) = f^{-1} \circ g^{-1}(z). \quad (3)$$

Soit z un élément quelconque de Z . Comme g est une bijection, il existe un unique $y \in Y$ tel que $g(y) = z$ et donc $g^{-1}(z) = y$. Il existe également un unique $x \in X$ tel que $f(x) = y$ et donc $f^{-1}(y) = x$. Puisque $g(y) = z$ et $f(x) = y$, on a $g(f(x)) = z$ soit $g \circ f(x) = z$ ou encore $(g \circ f)^{-1}(z) = x$ car la composée de deux bijections est une bijection. D'autre part comme $g^{-1}(z) = y$ et $f^{-1}(y) = x$ on a $f^{-1}(g^{-1}(z)) = x$ soit $f^{-1} \circ g^{-1}(z) = x$ ce

qui prouve (3).

1. Il s'agit d'une preuve par récurrence finie.

EXERCICE 17. Montrez qu'une application $f : X \rightarrow Y$ est une bijection si et seulement s'il existe une application $g : Y \rightarrow X$ telle que

$$g \circ f = \text{Id}_X \quad \text{et} \quad f \circ g = \text{Id}_Y. \quad (4)$$

Montrez dans ce cas que g est l'application réciproque f^{-1} de f .

Solution. Supposons que f soit une bijection. Pour définir une application g de Y dans X , il faut la définir en tout $y \in Y$. Soit $y \in Y$, comme f est bijective, il existe un unique $x \in X$ tel que $f(x) = y$, on fixe donc $g(y) := x$. On a alors $f(g(y)) = y$ soit $f \circ g(y) = y$ et nous venons de montrer que $\forall y \in Y, f \circ g(y) = y$, autrement dit que $f \circ g = \text{Id}_Y$. Soit $x \in X$ et $y := f(x)$ son image. Comme f est bijective, x est l'unique antécédent de y et par conséquent $g(y) = x$ d'où $g(f(x)) = x$ soit $g \circ f(x) = x$. Nous venons de montrer que $\forall x \in X, g \circ f(x) = x$, autrement dit que $g \circ f = \text{Id}_X$.

Réciproquement, supposons que (4) soit vrai, montrons que f est une bijection. Soit $y \in Y$, montrons qu'il existe un unique $x \in X$ tel que $f(x) = y$. On a $f \circ g(y) = y$ soit $f(g(y)) = y$ et on note $x := g(y)$ qui est donc un antécédent de y . Supposons que y admette un autre antécédent x' , i.e. $f(x') = y$, alors $g(f(x')) = g(y)$ soit $g \circ f(x') = x$ et finalement $x' = x$ puisque $g \circ f = \text{Id}_X$.

Il faut montrer que $\forall y \in Y, g(y) = f^{-1}(y)$. Par définition, $x := f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f et $f(x) = y$ et d'après (4), $g(f(x)) = x = g(y) = f^{-1}(y)$.

EXERCICE 18. Écrivez la négation logique de chacune des propriétés remarquables du graphe d'une relation binaire sur un ensemble (réflexif, symétrique, transitif, etc.).

Solution. On note G un graphe défini sur un ensemble X . Les propriétés remarquables de G et leurs négations sont les suivantes :

$$\text{réflexif} \quad \forall x \in X \quad (x, x) \in G$$

$$\text{non-réflexif} \quad \exists x \in X \quad (x, x) \notin G$$

$$\text{symétrique} \quad \forall (x, y) \in X \times X \quad (x, y) \in G \Rightarrow (y, x) \in G$$

$$\text{non-symétrique} \quad \exists (x, y) \in X \times X \quad (x, y) \in G \wedge (y, x) \notin G$$

$$\text{transitif} \quad \forall (x, y, z) \in X^3 \quad (x, y) \in G \wedge (y, z) \in G \Rightarrow (x, z) \in G$$

$$\text{non-transitif} \quad \exists (x, y, z) \in X^3 \quad (x, y) \in G \wedge (y, z) \in G \wedge (x, z) \notin G$$

$$\text{antiréflexif} \quad \forall x \in X \quad (x, x) \notin G$$

$$\text{non-antiréflexif} \quad \exists x \in X \quad (x, x) \in G$$

$$\text{antisymétrique} \quad \forall (x, y) \in X \times X \quad (x, y) \in G \wedge (y, x) \in G \Rightarrow x = y$$

$$\text{non-antisymétrique} \quad \exists (x, y) \in X \times X \quad (x, y) \in G \wedge (y, x) \in G \wedge x \neq y$$

$$\text{antitransitif} \quad \forall (x, y, z) \in X^3 \quad (x, y) \in G \wedge (y, z) \in G \Rightarrow (x, z) \notin G$$

$$\text{non-antitransitif} \quad \exists (x, y, z) \in X^3 \quad (x, y) \in G \wedge (y, z) \in G \wedge (x, z) \in G$$

EXERCICE 19. On définit une [relation binaire](#) \mathcal{R} sur l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des applications de \mathbb{N} dans \mathbb{N} par $f \mathcal{R} g$ si et seulement si les deux applications sont égales à partir d'un certain rang. Formalisez la définition de cette relation binaire. Démontrez qu'il s'agit d'une [relation d'équivalence](#).

Solution. On dit que $f \mathcal{R} g$ si et seulement si f et g satisfont la proposition suivante :

$$\exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Rightarrow f(n) = g(n). \quad (5)$$

On a bien $f \mathcal{R} f$ puisque dans ce cas le prédicat $P(N)$ est satisfait pour $N = 0$, la relation est donc réflexive. Elle est trivialement symétrique. Supposons que $f \mathcal{R} g$ et $g \mathcal{R} h$, on a donc les deux [assertions](#) suivantes :

$$\exists N_1 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N_1 \Rightarrow f(n) = g(n)$$

$$\exists N_2 \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N_2 \Rightarrow g(n) = h(n).$$

On définit $N := \max\{N_1, N_2\}$. Alors pour tout $n \geq N$ on a à la fois $f(n) = g(n)$ et $g(n) = h(n)$ et conséquemment $f(n) = h(n)$ par transitivité de l'égalité, soit $f \mathcal{R} h$.

EXERCICE 20. Démontrez que si \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur un ensemble X et $x \in X$, alors

$$\forall y \in \bar{x} \quad \bar{y} = \bar{x}. \quad (6)$$

Solution. Soit $y \in \bar{x}$, montrons que $\bar{y} = \bar{x}$, autrement dit d'après l'**axiome d'extension** que $\bar{y} \subseteq \bar{x}$ et $\bar{x} \subseteq \bar{y}$. Soit $a \in \bar{y}$ donc $a \mathcal{R} y$ mais $y \in \bar{x}$ donc $y \mathcal{R} x$ et par transitivité : $a \mathcal{R} x$ donc $a \in \bar{x}$. Soit $a \in \bar{x}$ donc $a \mathcal{R} x$ mais $y \in \bar{x}$ donc $y \mathcal{R} x$ et $x \mathcal{R} y$ par symétrie, et finalement par transitivité : $a \mathcal{R} y$ donc $a \in \bar{y}$.

EXERCICE 21. Démontrez que si \mathcal{R} une relation d'équivalence définie sur un ensemble X alors l'ensemble quotient X/\mathcal{R} est une **partition** de l'ensemble X . Réciproquement démontrez que si $P \subseteq \mathcal{P}(X)$ est une partition de X alors il existe une unique relation d'équivalence \mathcal{R} sur X telle que $X/\mathcal{R} = P$ et qu'elle est définie par

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists A \in P \quad (x \in A) \text{ et } (y \in A). \quad (7)$$

Solution. On considère une classe d'équivalence \bar{x} de X/\mathcal{R} . Par définition $x \in \bar{x}$, donc $x \in \bar{x} \neq \emptyset$. Soit \bar{y} une autre classe d'équivalence, i.e. $\bar{x} \neq \bar{y}$, montrons que $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$. Par l'absurde, s'il existe $a \in \bar{x} \cap \bar{y}$, alors d'après l'exercice (20) on a $\bar{a} = \bar{x}$ et $\bar{a} = \bar{y}$ et par transitivité de l'égalité $\bar{x} = \bar{y}$ ce qui est contradictoire. Pour finir, les singletons formés par les éléments de X forment évidemment une partition de X ,

$$\begin{aligned} X &= \bigsqcup_{x \in X} \{x\} \\ &\subseteq \bigcup_{x \in X} \bar{x} \quad \text{car } \{x\} \subseteq \bar{x} \end{aligned}$$

Réciproquement, considérons une partition $(X_i)_{i \in I}$ de X . On définit une relation \mathcal{R} sur X par

$$x \mathcal{R} y \Leftrightarrow x \in \bar{y}.$$

Montrons qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Soit $x \in X$, la relation \mathcal{R} est réflexive puisque $x \in \bar{x}$. Soit x et y deux éléments de X tels que $x \mathcal{R} y$, donc $\bar{x} = \bar{y}$ et ainsi $y \in \bar{x}$ soit $y \mathcal{R} x$. La relation est donc symétrique. Pour finir, soit x, y et z trois éléments de X tels que $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$, alors $x \in \bar{y}$ et $y \in \bar{z}$ et on en déduit que $\bar{x} = \bar{y} = \bar{z}$ ce qui prouve que $x \in \bar{z}$.

EXERCICE 22. Démontrez que la relation binaire d'inclusion \subseteq définie sur l'ensemble $\mathcal{P}(X)$ des parties d'un ensemble X est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ou partiel ?

Solution. La relation \subseteq est réflexive par définition de l'inclusion. Soit A et B deux parties de X , l'**axiome d'extension** permet d'affirmer que cette relation est antisymétrique :

$$(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A) \Leftrightarrow A = B.$$

Soit A, B et C trois parties de X . Si $A \subseteq B$, alors $\forall x \in A, x \in B$ et si $B \subseteq C$, alors $x \in C$ donc $A \subseteq C$. La relation est donc transitive.

Si l'ensemble X est vide ou réduit à un singleton, c'est une relation d'ordre total, dans tous les autres cas, c'est une relation d'ordre partiel car il existe au moins une paire $\{a, b\}$ dans $\mathcal{P}(X)$ et $\{a\} \not\subseteq \{b\}$ et $\{b\} \not\subseteq \{a\}$.

EXERCICE 23. † On définit la relation de divisibilité $|$ sur l'ensemble des entiers naturels \mathbb{N} par

$$a | b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} \quad ac = b.$$

1. Démontrez qu'il s'agit d'une relation d'ordre partiel.
2. Vérifiez que 0 est le plus grand élément pour cette relation.
3. Existe-t-il un plus petit élément ?

On restreint à présent cette relation à l'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

4. Existe-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ?
5. Quels sont alors les éléments minimaux, maximaux s'il en existe ?
6. Tracez le diagramme de Hasse de la relation de divisibilité restreinte à l'ensemble $\llbracket 1, 15 \rrbracket$.

Solution. (1) La relation de divisibilité est réflexive puisque pour tout $a \in \mathbb{N}$, $a | a$ en prenant $c = 1$. Soit a et b deux entiers naturels tels que $a | b$ et $b | a$. Il existe donc deux entiers c et c' tels que

$$ac = b \quad \text{et} \quad bc' = a.$$

En remplaçant a par bc' dans la première égalité, on en déduit que $bc'c = b$ ce qui entraîne que $cc' = 1$ puis $c = c' = 1$ car nous sommes dans \mathbb{N} et finalement $a = b$ prouvant que la relation est antisymétrique. Soit a, b et

c trois entiers naturels tels que $a \mid b$ et $b \mid c$. On dispose donc de deux entiers naturels d et d' tels que

$$ad = b \quad \text{et} \quad bd' = c.$$

et en remplaçant b par ad dans la deuxième égalité on obtient $add' = c$ ce qui prouve que $a \mid c$. La relation est donc transitive. C'est une relation d'ordre partiel car $2 \nmid 3$ et $3 \nmid 2$, entre autres.

1. En posant $c := 0$, on a

$$\forall a \in \mathbb{N} \quad ac = 0$$

ce qui prouve que 0 est le plus grand élément pour \mid (“tout le monde divise 0”).

2. Pour tout entier $b \in \mathbb{N}$, on a trivialement $1 \mid b$, donc 1 est le plus petit élément pour la relation \mid .

3. L'ensemble $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ n'admet pas de plus petit élément ni de plus grand élément pour la divisibilité.

4. Il n'admet pas d'éléments maximaux mais admet des éléments minimaux, les nombres premiers.

5. Un diagramme de Hasse possible est représenté en figure (10).

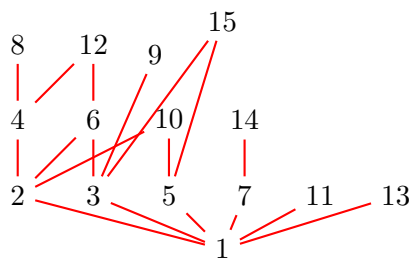


FIGURE 10. Diagramme de Hasse partiel pour la divisibilité.