

Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I23.

TD 2. Ensembles, logique des prédicats¹

EXERCICE 1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

$$\begin{aligned} \{\emptyset\} = \emptyset, & \quad \emptyset \subseteq \{\emptyset\}, & \quad \emptyset \in \{\emptyset\}, \\ \{a, b\} = \{b, a\}, & \quad \{a, a, b\} = \{a, b, b\}, & \quad \{a, b\} \subseteq \{\{a, b\}, \{a\}, a\}, \\ \{a\} \in \{a, b\}, & \quad a \subseteq \{a, b\}, & \quad \{a, b\} \in \{\{a, b\}, \{a\}, a\}, \\ \{a, b\} = \{a, \{b\}\}, & \quad \emptyset \in \emptyset, & \quad \{\emptyset, a\} \subseteq \{a\}. \end{aligned}$$

Solution. Une manière simple de régler ce type de questions est de voir les ensembles comme des “boîtes à chaussures” dont les contenus constituent les éléments de ces ensembles. Ainsi, l'ensemble $X := \{a, b\}$ est la boîte qui contient les deux objets a et b :

$$\boxed{a, b},$$

alors que $Y := \{a, \{b\}\}$ est la boîte qui contient l'objet a et la boîte \boxed{b} :

$$\boxed{a, \boxed{b}}.$$

Les deux ensembles X et Y sont donc différents.

On résume les principaux cas de figure : $X = Y$ si les boîtes X et Y contiennent *exactement* les mêmes objets, $X \subseteq Y$ si tous les objets contenus dans la boîte X sont contenus dans la boîte Y et $x \in X$ si la boîte X contient l'objet x .

Attention, pour que cette métaphore fonctionne, il faut prendre garde au fait qu'en mathématiques, un symbole ne peut pas représenter des objets différents dans un même ensemble, alors que dans le monde physique deux stylos *bic* bleus peuvent coexister dans la même boîte. Mais, ils ne sont pas pour autant *égaux* ! Donc, si on devait modéliser une boîte contenant deux bics bleus en mathématiques, ils faudrait les *distinguer* par des identificateurs différents, x et y ou b et b' ... Autrement dit, parler de deux objets différents représentés par un même identificateur x dans un ensemble n'a pas de sens, l'ensemble $\{x, x\}$ ne contient en réalité que le seul objet x .

1. version du 17 février 2023, 08 : 16

Par exemple la proposition $\{a, b\} \subseteq \{\{a, b\}, \{a\}, a\}$ est fausse puisque le contenu de la boîte de gauche, à savoir a et b , n'est pas présent dans la boîte de droite qui contient a , la boîte $\{a\}$ et la boîte $\{a, b\}$ mais ne contient pas b ! En revanche, $\{a, b\} \in \{\{a, b\}, \{a\}, a\}$:

$$\boxed{a, b} \notin \boxed{\boxed{a, b}, \boxed{a}, a} \quad \text{mais} \quad \boxed{a, b} \in \boxed{\boxed{a, b}, \boxed{a}, a}$$

Les propositions vraies sont préfixées par le symbole \checkmark , les autres sont donc fausses :

$$\begin{aligned} \{\emptyset\} = \emptyset, & \quad \checkmark \emptyset \subseteq \{\emptyset\}, & \quad \checkmark \emptyset \in \{\emptyset\}, \\ \checkmark \{a, b\} = \{b, a\}, & \quad \checkmark \{a, a, b\} = \{a, b, b\}, & \quad \{a, b\} \subseteq \{\{a, b\}, \{a\}, a\}, \\ \{a\} \in \{a, b\}, & \quad a \subseteq \{a, b\}, & \quad \checkmark \{a, b\} \in \{\{a, b\}, \{a\}, a\}, \\ \{a, b\} = \{a, \{b\}\}, & \quad \emptyset \in \emptyset, & \quad \{\emptyset, a\} \subseteq \{a\}. \end{aligned}$$

L'inclusion $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$ mérite un petit commentaire, la métaphore des boîtes à chaussures n'est pas nécessairement évidente ici : le contenu de la boîte vide est-il contenu dans la boîte qui contient la boîte vide ? Il est préférable ici de comprendre pourquoi l'ensemble vide \emptyset est *toujours* inclus dans n'importe quel ensemble X . Par définition de l'inclusion, $\emptyset \subseteq X$ si et seulement si

$$\forall x \ x \in \emptyset \Rightarrow x \in X.$$

Mais quelle que soit la valeur de x , la proposition $x \in \emptyset$ est toujours fausse rendant la proposition $x \in \emptyset \Rightarrow x \in X$ toujours vraie.

EXERCICE 2. Indiquez si les énoncés suivants sont des propositions ou des prédicats et dans ce dernier cas précisez la ou les variable(s).

$$\begin{aligned} \exists y \in \mathbb{R} \ x^2 - y = \sqrt{2}, & \quad \forall n \in \mathbb{Z} \ \exists k \in \mathbb{Z} \ (n = 2k) \vee (n = 2k + 1), \\ \exists y \in \mathbb{R} \ (0 < x \leq y), & \quad \exists k \in \mathbb{Z} \ x + y = k, \\ \forall x \in \mathbb{Z} \ x(x - 1) = 2y, & \quad \exists (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ x^2 - y^2 = 2. \end{aligned}$$

Solution. Les variables qui ne sont pas quantifiées dans les prédicats sont soulignées en rouge, les autres énoncés sont donc des propositions :

$$\begin{aligned} \exists y \in \mathbb{R} \ \underline{x}^2 - y = \sqrt{2}, & \quad \forall n \in \mathbb{Z} \ \exists k \in \mathbb{Z} \ (n = 2k) \vee (n = 2k + 1), \\ \exists y \in \mathbb{R} \ (0 < \underline{x} \leq y), & \quad \exists k \in \mathbb{Z} \ \underline{x} + \underline{y} = k, \\ \forall x \in \mathbb{Z} \ x(x - 1) = 2\underline{y}, & \quad \exists (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ x^2 - y^2 = 2. \end{aligned}$$

EXERCICE 3. Écrivez de manière formalisée que la réunion ensembliste est distributive sur l'intersection et réciproquement et démontrez le.

Solution. Soit X, Y et Z trois ensembles. Alors

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \quad (1)$$

$$X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z) \quad (2)$$

Montrons (1). D'après l'axiome d'extension, il faut montrer la “double inclusion” :

$$X \cup (Y \cap Z) \subseteq (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \quad (3)$$

$$\text{et } (X \cup Y) \cap (X \cup Z) \subseteq X \cup (Y \cap Z) \quad (4)$$

Pour (3), on a

$$\begin{aligned} x \in (X \cup (Y \cap Z)) &\Leftrightarrow (x \in X) \vee (x \in (Y \cap Z)) \\ &\Leftrightarrow (x \in X) \vee ((x \in Y) \wedge (x \in Z)) \end{aligned}$$

et par distributivité de \vee sur \wedge :

$$\begin{aligned} x \in (X \cup (Y \cap Z)) &\Leftrightarrow ((x \in X) \vee (x \in Y)) \wedge ((x \in X) \vee (x \in Z)) \\ &\Leftrightarrow (x \in (X \cup Y)) \wedge (x \in (X \cup Z)) \\ &\Leftrightarrow x \in ((X \cup Y) \cap (X \cup Z)) \end{aligned}$$

Notons que l'on a simultanément démontré l'inclusion (4) car nous n'avons utilisé que des équivalences (on peut rebrousser chemin). La preuve de la proposition (2) est identique, il suffit d'échanger les rôles de \cap et \cup et d'utiliser cette fois la distributivité de \wedge sur \vee .

EXERCICE 4. Soit X et Y deux ensembles. Démontrez que

$$(X \cap Y = X \cup Y) \Rightarrow X = Y.$$

Solution. On rappelle que pour démontrer qu'une implication $A \Rightarrow B$ est vraie, il suffit de montrer que si A est vrai alors B est nécessairement vrai (A est l'hypothèse et B la conclusion). On suppose donc que $X \cap Y = X \cup Y$ et il faut prouver que $X = Y$, c'est-à-dire $X \subseteq Y$ et $Y \subseteq X$ d'après l'axiome d'extension. Soit $x \in X$, donc $x \in X \cup Y$ puis $x \in X \cap Y$ d'après l'hypothèse. Il suffit d'intervertir le rôle des ensembles X et Y pour prouver l'inclusion $Y \subseteq X$.

EXERCICE 5. Soit X et Y deux ensembles. Démontrez les équivalences :

$$X \cup Y = Y \Leftrightarrow X \subseteq Y. \quad (5)$$

$$X \cap Y = Y \Leftrightarrow Y \subseteq X. \quad (6)$$

Solution. Commençons par (5). Pour montrer cette équivalence, il faut montrer l'implication $X \cup Y = Y \Rightarrow X \subseteq Y$ puis l'implication réciproque $X \subseteq Y \Rightarrow X \cup Y = Y$. Pour l'implication, soit $x \in X$, alors $x \in X \cup Y$ et donc $x \in Y$ d'après l'hypothèse $X \cup Y = Y$.

Pour l'implication réciproque, soit $x \in X \cup Y$ donc $(x \in X) \vee (x \in Y)$. Si $x \in Y$, on a fini la preuve, sinon c'est que $x \in X$ mais l'hypothèse $X \subseteq Y$ nous donne $x \in Y$.

Passons à (6) en montrant que $X \cap Y = Y \Rightarrow Y \subseteq X$ puis que $Y \subseteq X \Rightarrow X \cap Y = Y$. Soit $x \in Y$, l'hypothèse $Y = X \cap Y$ nous permet d'écrire $x \in X \cap Y$ et donc $x \in X$.

Pour l'implication réciproque, l'inclusion $(X \cap Y) \subseteq Y$ est toujours vraie, avec ou sans l'hypothèse, il ne reste qu'à montrer que $Y \subseteq (X \cap Y)$. Soit $x \in Y$, l'hypothèse $Y \subseteq X$ nous donne $x \in X$ et finalement $x \in (X \cap Y)$.

EXERCICE 6. † Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $M_n := \{kn \mid k \in \mathbb{N}, k > 1\}$ l'ensemble des multiples de n non-triviaux et on pose

$$M := \{0, 1\} \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}, n \geq 2} M_n.$$

Démontrez que $\mathbb{N} \setminus M$ est l'ensemble de tous les nombres premiers \mathcal{P} . On rappelle qu'un nombre entier est premier si et seulement s'il admet *exactement* deux diviseurs.

Solution. Il s'agit dans cet exercice de démontrer la validité de l'algorithme du [crible d'Erathostène](#) qui sera étudié dans le chapitre d'arithmétique. Il faut montrer que $\mathbb{N} \setminus M = \mathcal{P}$, soit la double inclusion

$$\mathbb{N} \setminus M \subseteq \mathcal{P} \quad \text{et} \quad \mathcal{P} \subseteq \mathbb{N} \setminus M$$

Soit $p \in \mathbb{N} \setminus M$, montrons que p est premier, i.e. que p admet exactement deux diviseurs. Comme $\{0, 1\} \subseteq M$ et que $p \notin M$, on a $p > 1$ et p admet donc au moins deux diviseurs, 1 et lui-même. Montrons qu'il n'y en pas

d'autre. Par l'absurde, si p admettait un autre diviseur n que 1 et lui-même, alors il existerait $k > 1$ tel que $kn = p$ et par conséquent $p \in M_n$ ce qui est absurde.

Réciproquement supposons que p soit un nombre premier, il est donc strictement supérieur à 1 et n'admet pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même. Par conséquent, p n'appartient à aucun des ensembles M_n , ce qui permet de conclure que $p \in \mathbb{N} \setminus M$.

EXERCICE 7. Écrivez les ensembles $\mathcal{P}(\{0\})$ et $\mathcal{P}(\{a, b\})$ en extension.

Solution. On a $\mathcal{P}(\{0\}) = \{\emptyset, \{0\}\}$ et $\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

EXERCICE 8. Quel axiome de la théorie des ensembles justifie l'existence de l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$?

Solution. Il s'agit de l'[axiome de sélection](#).

EXERCICE 9. Soit X et Y deux ensembles, $P(x)$, $Q(x)$ et $R(x)$ des prédicats. Écrivez la négation des propositions suivantes :

- (1) $\forall x \in X \ P(x) \Rightarrow Q(x)$
- (2) $\exists x \in X \ P(x) \Rightarrow Q(x)$
- (3) $\exists x \in X \ P(x) \Leftrightarrow Q(x)$
- (4) $\forall x \in X \ \neg P(x) \wedge Q(x)$
- (5) $\forall x \in X \ P(x) \vee \neg Q(x)$
- (6) $\exists x \in X \ \neg P(x) \oplus Q(x)$
- (7) $\forall x \in X \ \exists y \in Y \ P(x) \Rightarrow (\neg Q(x) \wedge R(y))$
- (8) $\exists x \in X \ \forall y \in Y \ P(x) \vee \neg Q(x, y)$

Solution. On a les négations :

- (1) $\exists x \in X \ P(x) \wedge \neg Q(x)$
- (2) $\forall x \in X \ P(x) \wedge \neg Q(x)$
- (3) $\forall x \in X \ P(x) \oplus Q(x)$
- (4) $\exists x \in X \ P(x) \vee \neg Q(x)$
- (5) $\exists x \in X \ \neg P(x) \wedge Q(x)$
- (6) $\forall x \in X \ \neg P(x) \Leftrightarrow Q(x)$

$$(7) \ \exists x \in X \ \forall y \in Y \ P(x) \wedge (Q(x) \vee \neg R(y))$$

$$(8) \ \forall x \in X \ \exists y \in Y \ \neg P(x) \wedge Q(x, y)$$

EXERCICE 10. Traduisez la proposition suivante sans utiliser le quantificateur existentiel $\exists!$, puis écrire sa négation :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists! k \in \mathbb{N} \ (n = 2k) \vee (n = 2k + 1).$$

Solution. Pour rendre les expressions plus lisibles, on note $P(n, k)$ le prédicat $(n = 2k) \vee (n = 2k + 1)$ défini sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. La traduction se décompose sous la forme d'une conjonction de deux propositions, la première exprime l'[existence](#) de k et la seconde l'[unicité](#) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \left[(\exists k \in \mathbb{N} \ P(n, k)) \wedge \left[\forall (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2 \left((P(n, k_1) \wedge P(n, k_2)) \Rightarrow (k_1 = k_2) \right) \right] \right]. \quad (7)$$

Le prédicat $\neg P(n, k)$ s'écrit $(n \neq 2k) \wedge (n \neq 2k + 1)$. La négation de la proposition (7) est :

$$\exists n \in \mathbb{N} \ (\forall k \in \mathbb{N} \ \neg P(n, k)) \vee \left(\exists (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2 \ (P(n, k_1) \wedge P(n, k_2)) \wedge (k_1 \neq k_2) \right).$$

Notons que l'on pouvait également définir l'existence et l'unicité avec l'expression suivante (il faut être attentif à la place des parenthèses) :

$$\forall n \in \mathbb{N} \left[(\exists k \in \mathbb{N} \ P(n, k)) \wedge \left[\left(\exists (k_1, k_2) \in \mathbb{N}^2 \ (P(n, k_1) \wedge P(n, k_2)) \right) \Rightarrow (k_1 = k_2) \right] \right]. \quad (8)$$

EXERCICE 11. La continuité simple d'une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en tout nombre réel s'écrit

$$\forall x \in \mathbb{R} \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in \mathbb{R} \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (9)$$

Alors que la continuité uniforme s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x \in \mathbb{R} \ \forall y \in \mathbb{R} \ |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon. \quad (10)$$

Écrivez la négation de ces deux propositions.

Solution. La proposition (9) exprime que pour tout réel x , on peut approcher son image $f(x)$ d'aussi près que l'on veut (on fixe la distance maximale ε) avec l'image $f(y)$ d'un réel y , à condition que y soit situé dans un rayon δ de x , ce rayon dépendant à la fois de x et de ε . La proposition (10) est beaucoup plus forte, elle exprime encore la continuité, mais le rayon δ ne dépend plus que de la distance ε , il est le même pour tout point x , d'où le qualificatif d'uniformité.

Voici les deux négations respectivement :

$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad \exists y \in \mathbb{R} \quad |x - y| < \delta \wedge |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon.$$

Notons que $\exists \varepsilon > 0$ est un abus de notation commun (entre autres), l'ensemble auquel appartient ε n'est pas précisé, il s'agit implicitement de \mathbb{R} vu le contexte. En toute rigueur, il aurait fallu écrire $\exists \varepsilon \in \mathbb{R} \quad \varepsilon > 0$ ou $\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^*$ où $\mathbb{R}^* := \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

EXERCICE 12. † On rappelle que $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Démontrez que

$$(x, y) = (x', y') \Rightarrow (x = x') \wedge (y = y').$$

Solution. Supposons que $(x, y) = (x', y')$. On a donc

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}.$$

Ce que l'on traduit grâce à l'axiome d'extension :

$$\{\{x\}, \{x, y\}\} \subseteq \{\{x'\}, \{x', y'\}\} \quad \text{et} \quad \{\{x'\}, \{x', y'\}\} \subseteq \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

De la première inclusion on déduit que $\{x\} \in \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$, autrement dit $\{x\} = \{x'\}$ ou $\{x\} = \{x', y'\}$. Dans le premier cas, on a alors $x = x'$ puis $\{x, y\} = \{x, y'\}$ et donc $y = y'$. Dans l'autre cas on tire $x = x' = y'$ et nécessairement $y = y'$.

EXERCICE 13. Exprimez les phrases suivantes en logique des prédicats ainsi que leur négation :

1. f est l'application identité du plan réel dans lui-même.
2. f est une application du plan réel dans lui-même qui admet un point fixe.
3. f est une application constante de l'ensemble des réels dans lui-même.

4. f est une application de l'ensemble des réels dans lui-même et l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

5. f et g sont des applications de l'ensemble des réels dans lui-même f n'est pas inférieure à g .

6. f est une application *paire* de l'ensemble des réels dans lui-même.

7. f est une application *paire* de l'ensemble des réels dans lui-même strictement décroissante.

8. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée.

9. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle croissante.

10. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle constante à partir d'un certain rang.

11. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle périodique.

12. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle ultimement périodique.

Solution. Les propositions sont les suivantes :

$$1. f \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{R}^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (x, y).$$

$$2. f \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{R}^2} \quad \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) = (x, y).$$

$$3. f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \quad \exists c \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = c.$$

$$4. f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \quad (\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0) \wedge (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (f(x) = 0 \wedge f(y) = 0) \Rightarrow x = y).$$

$$5. (f, g) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) > g(x).$$

$$6. f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(-x).$$

$$7. f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \quad (\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = f(-x)) \wedge (\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)).$$

$$8. (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \exists (A, B) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad A \leq u_n \leq B.$$

$$9. (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \forall (n, m) \in \mathbb{N}^2 \quad n \leq m \Rightarrow u_n \leq u_m.$$

$$10. (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \exists c \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Rightarrow u_n = c.$$

$$11. (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} = u_n.$$

$$12. (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \exists p \in \mathbb{N} \quad \exists N \in \mathbb{N} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geq N \Rightarrow u_{n+p} = u_n.$$

Les négations de ces propositions sont :

$$1. f \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{R}^2} \quad \exists (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) \neq (x, y).$$

$$2. f \in (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{R}^2} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x, y) \neq (x, y).$$

3. $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq c$
4. $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \quad (\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq 0) \vee$
 $(\exists(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (f(x) = 0 \wedge f(y) = 0 \wedge x \neq y)).$
5. $(f, g) \in (\mathbb{R}^{\mathbb{R}})^2 \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \leq g(x).$
6. $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq f(-x).$
7. $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \quad (\exists x \in \mathbb{R} \quad f(x) \neq f(-x)) \vee$
 $(\exists(x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad (x < y) \wedge (f(x) \leq f(y))).$
8. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \forall(A, B) \in \mathbb{R}^2 \quad \exists x \in \mathbb{R} \quad (u_n < A) \vee (u_n > B).$
9. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \exists(n, m) \in \mathbb{N}^2 \quad (n \leq m) \wedge (u_n > u_m).$
10. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \forall c \in \mathbb{R} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N) \wedge (u_n \neq c).$
11. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad u_{n+p} \neq u_n;$
12. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall N \in \mathbb{N} \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad (n \geq N) \wedge (u_{n+p} \neq u_n).$

EXERCICE 14. Formalisez les propositions suivantes en logique des prédicats puis écrivez la négation de ces propositions :

1. “Tous les étudiants habitant Hyères et qui mesurent moins de 1,70m auront deux enfants ou prendront leur retraite avant 50 ans.”
2. “Tout triangle rectangle possède un angle droit”.
3. “Dans toutes les licences d’informatique il y a des étudiants bons en maths”.

Solution. Voilà quelques formalisations *possibles* de ces énoncés, on peut bien sûr en trouver d’autres.

1. On définit 4 prédicats $H(x)$, $M(x)$, $D(x)$ et $R(x)$ sur l’ensemble E des étudiants. L’interprétation est la suivante : $H(x)$ est vrai si x habite Hyères, $M(x)$ est vrai si x mesure moins de 1,70m, $D(x)$ est vrai si x aura deux enfants et $R(x)$ est vrai si x prendra sa retraite avant 50 ans. L’énoncé se formalise (la négation est en rouge) :

$$\forall x \in E \quad H(x) \wedge M(x) \Rightarrow D(x) \vee R(x).$$

$$\exists x \in E \quad H(x) \wedge M(x) \wedge \neg D(x) \wedge \neg R(x).$$

2. On définit les deux prédicats $R(t)$ et $D(t)$ sur l’ensemble des triangles T . L’interprétation est la suivante : $R(t)$ est vrai si le triangle t est rectangle,

$D(t)$ est vrai si le triangle t possède un angle droit. L’énoncé se formalise (la négation est en rouge) :

$$\forall t \in T \quad R(t) \Rightarrow D(t).$$

$$\exists t \in T \quad R(t) \wedge \neg D(t).$$

3. On note L l’ensemble des promotions de licences d’informatique et $M(x)$ le prédicat dont l’interprétation est la suivante : $M(x)$ est vrai si l’étudiant x est bon en maths. On aurait alors la proposition (sa négation est en rouge) :

$$\forall X \in L \quad \exists x \in X \quad M(x).$$

$$\exists X \in L \quad \forall x \in X \quad \neg M(x).$$

EXERCICE 15. On cherche à placer 8 reines sur un échiquier sans qu’elles se mettent en échec conformément aux règles du jeu d’échecs. Par conséquent, deux reines ne doivent partager ni la même rangée, ni la même colonne, ni une même diagonale (vous trouverez une solution en table 1). En vous inspirant de la formalisation du Sudoku, formalisez le problème des huit reines en logique des prédicats.

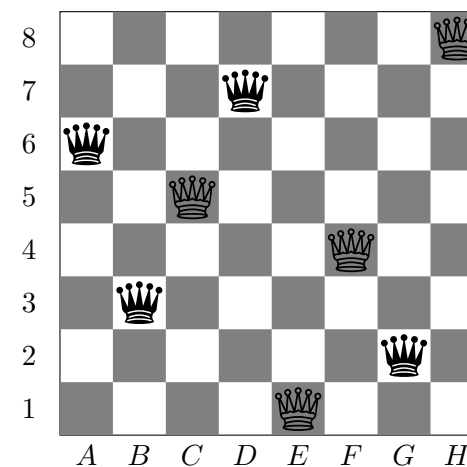


TABLE 1. Une solution au problème des 8 reines.

Solution. On note I l'intervalle $\llbracket 1, 8 \rrbracket$ de \mathbb{N} muni de l'ordre naturel. On définit $R(c, l)$ le prédicat à deux variables sur l'ensemble $I \times I$ dont l'interprétation est la suivante : $R(c, l)$ est vrai si la case de coordonnées (c, l) contient une reine (on a recodé les lettres de l'alphabet latin identifiant les colonnes par leurs positions dans l'ordre alphabétique).

Les propositions assurant qu'il y exactement une reine sur chaque ligne et sur chaque colonne se décomposent respectivement en deux propositions chacune, la première assurant l'existence (mais il pourrait y en avoir plusieurs) et la seconde l'unicité :

$$\forall l \in I \exists c \in I \quad R(c, l) \quad (\text{existence}) \quad (11)$$

$$\forall l \in I \forall (c, c') \in I \times I \quad (R(c, l) \wedge R(c', l)) \Rightarrow c = c' \quad (\text{unicité}) \quad (12)$$

$$\forall c \in I \exists l \in I \quad R(c, l) \quad (\text{existence}) \quad (13)$$

$$\forall c \in I \forall (l, l') \in I \times I \quad (R(c, l) \wedge R(c, l')) \Rightarrow l = l' \quad (\text{unicité}) \quad (14)$$

Il reste à formaliser la contrainte qu'il n'y a jamais plus d'une reine sur une diagonale. On montre facilement que deux reines placées aux coordonnées (c, l) et (c', l') sont sur une même diagonale si et seulement si $|c' - c| = |l' - l|$. On en déduit la proposition suivante pour modéliser qu'il n'y a jamais deux reines sur la même diagonale :

$$\forall ((c, l), (c', l')) \in (I \times I)^2 \quad (R(c, l) \wedge R(c', l')) \Rightarrow |c' - c| \neq |l' - l|. \quad (15)$$

Le problème des huit reines se traduit donc par la recherche de couples $(c, l) \in I \times I$ qui satisfont les propositions (11), (12), (13), (14) et (15). En programmant ces contraintes (en *Prolog* par exemple), on obtient 92 solutions.