Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique UE-12.

TD 1. Raisonnement, logique propositionnelle [1]

EXERCICE 1. Un mathématicien discute avec un ami logicien dont l'épouse vient d'accoucher. Il lui demande *"Avez-vous eu un garçon ou une fille ?"* et le logicien lui répond *"Oui"*. Expliquez la réponse du logicien.

Solution. La première chose à remarquer est que le connecteur logique *ou* est inclusif en logique propositionnelle alors qu'il est souvent utilisé de manière exclusive dans la langue naturelle, comme c'est le cas ici pour la question du mathématicien. Si on formalise ce problème, on définit la variable propositionnelle G dont l'interprétation est la suivante : elle est *vraie* si l'enfant est un garçon et *fausse* si c'est une fille. Le mathématicien veut en réalité connaître la valeur de vérité de la proposition atomique G, mais en posant la question en langue naturelle, il interroge en fait le logicien sur la valeur de vérité de la proposition $G \oplus \neg G$, que le mathématicien comprend $G \vee \neg G$, ce qui explique sa réponse puisqu'il s'agit d'une tautologie (le *tiers exclu*). Notons que, quand bien même le logicien aurait formalisé la question de son collègue par la formule $G \oplus \neg G$, l'enfant ne pouvant être simultanément un garçon *et* une fille, version physiologique du tiers exclus [2], $G \oplus \neg G$ est aussi une tautologie.

EXERCICE 2. Trouvez des propositions en langue naturelle dans lesquelles le connecteur logique *ou* est inclusif.

Solution. En voici quelques unes :

(a) *"J'aime me promener en forêt ou à la montagne."*

(b) *"Le néon ou le radon sont des gaz."*

(c) *"12 est un multiple de 3 ou 4."*

(d) *"On peut trouver cet article en grande surface ou sur le net."*

(e) *"Demain il y aura du vent ou du soleil."*

(f) *"Ce traitement est destiné aux chiens ou aux chats."*

1. Version du 25 septembre 2024 [14:46]
2. La nature prend parfois quelques libertés avec cette "règle".

EXERCICE 3. Chacun des énoncés suivant contient une erreur, indiquez s'il s'agit d'une erreur lexicale, syntaxique ou sémantique ?

(a) *"La saucisse a mangé le chien."*

(b) *"Je n'ai rien compris à cet algorythme."*

(c) *"Moi Tarzan, toi bonjour ?"*

(d) *"La leçon que j'ai appris."*

(e) *"La nuit il fait plus froid que dehors."*

Solution. Les phrases (a) et (e) ne contiennent ni erreur lexicale ni syntaxique, elles respectent l'orthographe et la grammaire, mais contiennent une erreur *sémantique*, elles n'ont pas de *sens*.

La phrase (b) contient uniquement une erreur *lexicale*, le mot *algorithme* étant mal orthographié.

La phrase (c) contient une erreur *syntaxique* puisque la grammaire n'est pas respectée et une erreur sémantique.

La phrase (d) contient une erreur syntaxique, la grammaire française n'est pas respectée (la leçon que j'ai *apprise*).

EXERCICE 4. Soit P, Q et R des variables propositionnelles. Dessinez l'arbre de dérivation de chacune des formules ci-dessous en rajoutant les parenthèses omises si nécessaire :

(a) $(P \vee Q) \Rightarrow \neg(P \wedge \neg R)$ (b) $P \vee Q \vee \neg R$.

(c) $\neg(P \wedge Q) \vee \neg R$ (d) $(P \Rightarrow \neg R) \Leftrightarrow (\neg P \Leftrightarrow Q)$.

Solution. Les solutions sont représentées dans la figure 1.
Il faut remarquer qu'en toute rigueur l'expression (b) n'est pas syntaxiquement correcte, mais le connecteur $\vee$ étant *associatif*, on a

$$(P \vee Q) \vee \neg R \equiv P \vee (Q \vee \neg R)$$

mais il faut néanmoins faire un choix et c'est la première expression qui est choisie conventionnellement.

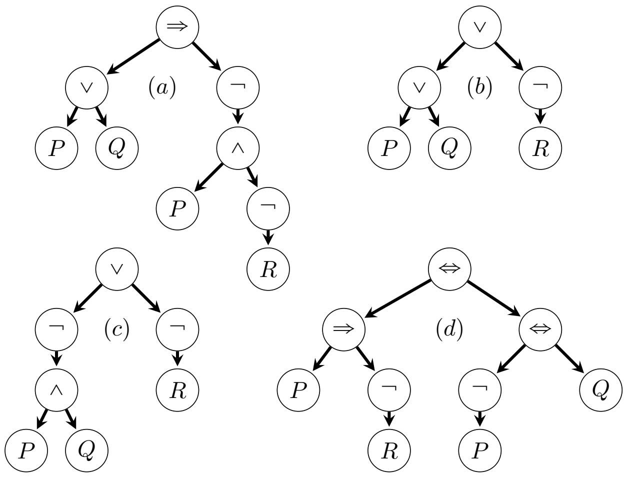

Figure 1. Arbres de dérivation des formules (a) à (d).

EXERCICE 5. Soit P et Q deux propositions. Si la formule $P \Rightarrow Q$ est vraie, que pouvez-vous déduire sur la valeur de vérité de P, de Q ? Si de plus P est vraie, que pouvez déduire sur la valeur de vérité de Q et réciproquement ?

Solution. Comme le montre la table de vérité 1, la formule $P \Rightarrow Q$ est vraie pour trois interprétations et la variable propositionnelle P (resp. Q) peut être vraie ou fausse. Si de plus P est vraie alors Q est nécessairement vraie puisque seule la quatrième interprétation est possible. En revanche, si $P \Rightarrow Q$ et Q sont vraies, on ne peut rien déduire sur la valeur de vérité de P puisque les interprétations 2 et 4 sont possibles.

	P	Q	$P \Rightarrow Q$
1	F	F	$\boldsymbol{V}$
2	F	V	$\boldsymbol{V}$
3	V	F	F
$\rightarrow$ 4	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$

Table 1. Table de vérité du connecteur d'implication.

Donc, si l'on dispose d'une proposition P vraie et que l'on est en mesure de démontrer que $P \Rightarrow Q$ alors on a prouvé que Q est vraie également. C'est la règle du *modus ponens* qui constitue l'un des piliers de la déduction logique.

EXERCICE 6. On qualifie de *jumeau/jumelle* toute personne qui a un ou plusieurs frères ou sœurs du même accouchement. Pourquoi la phrase *"Donald et Vladimir sont des jumeaux"* ne peut pas être considérée comme une proposition mathématique alors même que l'on peut lui attribuer une valeur de vérité ?

Solution. Il y a une ambiguité sur l'interprétation du mot *jumeaux* dans l'énoncé. Ils le sont chacun de leur côté dans leurs propres fratries ou ils sont de la même fratrie.

EXERCICE 7. Rappelez les deux lois de De Morgan et démontrez les.

Solution. Si P et Q sont deux propositions, alors on a :

$$\neg(P \vee Q) \equiv (\neg P \wedge \neg Q)$$
$$\neg(P \wedge Q) \equiv (\neg P \vee \neg Q)$$

et il suffit de comparer les tables de vérité pour conclure.

P	Q	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$\neg(P \vee Q)$	$\neg P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$\neg P \vee \neg Q$
F	F	F	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F	V	V
V	V	V	V	F	F	F	F

Table 2. Tables de vérité des lois de De Morgan.

EXERCICE 8. Soit P, Q et R des variables propositionnelles. Démontrez que le connecteur logique d'implication est *transitif* (cf. formule $(\mathscr{F})$) en construisant des tables de vérité.

$$\big((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)\big) \Rightarrow (P \Rightarrow R) \qquad (\mathscr{F})$$

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$P \Rightarrow R$	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \Rightarrow C$
F	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F	V
V	V	V	V	V	V	V	V

Table 3. Table de vérité de la formule $\mathscr{F}$.

Solution. On note $A \equiv P \Rightarrow Q$, $B \equiv Q \Rightarrow R$ et $C \equiv P \Rightarrow R$.
Comme on peut le constater, toutes les interprétations sont vraies, la valeur de vérité de la formule $\mathscr{F}$ est indépendante des variables propositionnelles qu'elle contient, c'est une *tautologie*.

EXERCICE 9. † Soit P, Q et R des variables propositionnelles. Construisez la table de vérité du connecteur logique ternaire $\Rrightarrow$ (*"si/alors/sinon"*) et démontrez que

$$\Rrightarrow(P, Q, R) \;\equiv\; (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R).$$

Solution. Le connecteur ternaire logique $\Rrightarrow(P, Q, R)$ a la valeur logique de la proposition Q si P est vrai et la valeur logique de la proposition R si P est faux. Il suffit alors de comparer les tables de vérité :

P	Q	R	$\Rrightarrow$	$P \wedge Q$	$\neg P \wedge R$	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$
F	F	F	F	F	F	F
F	F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F	F
F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	V	F	V	V	F	V
V	V	V	V	V	F	V

Table 4. Tables de vérité de $\Rrightarrow$ et $(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R)$.

EXERCICE 10. Démontrez que le connecteur $\oplus$ est commutatif. Parmi les autres connecteurs binaires, lesquels sont commutatifs ?

Solution. Pour montrer qu'un opérateur binaire $\diamond$ est commutatif, c'est-à-dire que pour toutes propositions P et Q, on a

$$P \diamond Q \equiv Q \diamond P,$$

on peut se contenter de vérifier que quand on intervertit la valeur de vérité des deux variables propositionnelles P et Q, la valeur de vérité de $P \diamond Q$ *ne change pas* (elle ne change évidemment pas quand les deux variables ont la même valeur de vérité !).

P	Q	$P \oplus Q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	F

Table 5. Table de vérité du connecteur $\oplus$.

C'est le cas également des connecteurs $\vee$, $\wedge$, $\Leftrightarrow$, $\uparrow$ et $\downarrow$ (voir les tables de vérité dans le cours). C'est donc essentiellement le connecteur d'implication $\Rightarrow$ qui n'est pas commutatif.

EXERCICE 11. Soit P et Q deux propositions. Démontrez que

$$(P \oplus Q) \equiv (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q) \tag{1}$$

Solution. Notons que nous avons défini le connecteur $\oplus$ à partir de sa table de vérité en cours, mais nous aurions pu le définir à partir de l'équivalence logique (1). Encore une fois, la table de vérité fournit le résultat :

P	Q	$P \oplus Q$	$P \vee Q$	$\neg(P \wedge Q)$	$(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$
F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F

Table 6. Tables de vérité de $\oplus$ et $(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$.

EXERCICE 12. Un connecteur logique binaire $\diamond$ est dit *associatif* si pour toutes propositions P, Q et R on a

$$(P \diamond Q) \diamond R \;\equiv\; P \diamond (Q \diamond R) \tag{2}$$

Montrez que la conjonction, la disjonction et l'équivalence sont des connecteurs associatifs, mais pas l'implication.

Solution. On compare les tables de vérité des membres gauche et droit de l'équivalence logique (2) pour le connecteur $\wedge$ (voir table 7). On procède de la même manière pour les autres connecteurs logiques, excepté pour le connecteur d'implication pour lequel il suffit de constater que si P est faux, la formule $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ est toujours vraie, quelles que soient les interprétations des variables propositionnelles Q et R, alors que la formule $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$ est fausse si R est fausse car $P \Rightarrow Q$ est vraie.

P	Q	R	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \wedge R$	$Q \wedge R$	$P \wedge (Q \wedge R)$
F	F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F
V	F	F	F	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
V	V	F	V	F	F	F
V	V	V	V	V	V	V

Table 7. Tables de vérité de $(P \wedge Q) \wedge R$ et $P \wedge (Q \wedge R)$.

EXERCICE 13. Soit P, Q et R trois propositions. Démontrez les deux équivalences logiques suivantes :

$$\big((P \wedge Q) \Rightarrow R\big) \;\equiv\; \big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\big) \tag{3}$$

$$\big(P \Leftrightarrow Q\big) \;\equiv\; \big((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)\big) \tag{4}$$

Solution. On peut démontrer ces deux équivalences logiques à l'aide de tables de vérité, mais on peut également utiliser les propriétés des connecteurs logiques.

$$\begin{aligned}
(P \wedge Q) \Rightarrow R &\equiv (\neg(P \wedge Q)) \vee R \quad (A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B)\\
&\equiv (\neg P \vee \neg Q) \vee R \quad (\text{De Morgan})\\
&\equiv \neg P \vee (\neg Q \vee R) \quad (\vee \text{ associatif})\\
&\equiv P \Rightarrow (Q \Rightarrow R) \quad (A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
P \Leftrightarrow Q &\equiv (P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P) \quad (\text{définition})\\
&\equiv (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \quad (A \Rightarrow B \equiv \neg A \vee B)\\
&\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge P) \vee (Q \wedge P) \quad (\text{distrib.})\\
&\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee \perp \vee \perp \vee (Q \wedge P) \quad (A \wedge \neg A \equiv \perp)\\
&\equiv (\neg P \wedge \neg Q) \vee (Q \wedge P) \quad (\perp \text{ neutre de } \vee)\\
&\equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \quad (\vee \text{ et } \wedge \text{ commutatifs})
\end{aligned}$$

EXERCICE 14. Soit P, Q et R trois propositions. Exprimez la négation des trois propositions suivantes :

(1) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$ (2) $\neg P \Rightarrow Q$ (3) $(P \wedge Q) \vee R$

Solution. **(1)** On rappelle que $(A \Rightarrow B) \equiv (\neg A \vee B)$:

$$\begin{aligned}
\neg(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)) &\equiv \neg(\neg P \vee (\neg Q \vee R))\\
&\equiv P \wedge (\neg(\neg Q \vee R))\\
&\equiv P \wedge (Q \wedge \neg R)
\end{aligned}$$

(2) On a $\neg(\neg P \Rightarrow Q) \equiv \neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$.

(3) Et $\neg((P \wedge Q) \vee R) \equiv \neg(P \wedge Q) \wedge \neg R \equiv (\neg P \vee \neg Q) \wedge \neg R$.

EXERCICE 15. † Soit P, Q et R trois variables propositionnelles et notons $\mathscr{F}$ la formule

$$\big((P \vee Q) \vee R\big) \Rightarrow (P \wedge Q)$$

(1) Donnez l'interprétation logique de la formule $\mathscr{F}$ si les variables P et Q sont fixées à V (resp. F) et R à F (resp. V).

(2) Montrez que $\mathscr{F}$ est logiquement équivalente à

$$(P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R) \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg R)$$

Solution. (1) Il suffit de remplacer les variables propositionnelles par leurs valeurs pour ces deux interprétations de la formule $\mathscr{F}$:

$$\begin{aligned}\Big(\big((V \vee V) \vee F\big) \Rightarrow (V \wedge V)\Big) &\equiv \big((V \vee F) \Rightarrow (V \vee V)\big)\\ &\equiv V \Rightarrow V\\ &\equiv V\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\Big(\big((F \vee F) \vee V\big) \Rightarrow (F \wedge F)\Big) &\equiv \big((F \vee V) \Rightarrow F\big)\\ &\equiv V \Rightarrow F\\ &\equiv F\end{aligned}$$

(2) On a

$$\begin{aligned}\mathscr{F} &\equiv \neg\big((P \vee Q) \vee R\big) \vee (P \wedge Q)\\ &\equiv \big(\neg(P \vee Q) \wedge \neg R\big) \vee (P \wedge Q)\\ &\equiv \big((\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg R\big) \vee (P \wedge Q)\\ &\equiv \big((\neg P \wedge \neg Q) \wedge \neg R\big) \vee (P \wedge Q)\end{aligned}$$

Et on distribue :

$$\begin{aligned}\mathscr{F} &\equiv \big((\neg P \wedge \neg Q) \vee (P \wedge Q)\big) \wedge \big(\neg R \vee (P \wedge Q)\big)\\ &\equiv \big((\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P) \wedge (\neg Q \vee Q)\big) \wedge \big(\neg R \vee (P \wedge Q)\big)\end{aligned}$$

Mais $(\neg A \vee A) \equiv V$ et $(V \wedge B) \equiv B$ donc

$$\begin{aligned}\mathscr{F} &\equiv \big((\neg P \vee Q) \wedge (\neg Q \vee P)\big) \wedge \big(\neg R \vee (P \wedge Q)\big)\\ &\equiv \big((Q \vee \neg P) \wedge (P \vee \neg Q)\big) \wedge \big((\neg R \vee P) \wedge (\neg R \vee Q)\big)\\ &\equiv (P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R) \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg R)\end{aligned}$$

EXERCICE 16. Soit P, Q, R et S des variables propositionnelles. Vérifiez que

$$\neg\Big(\big(((P \wedge Q) \vee P) \vee R\big) \vee S\Big) \equiv \big((\neg P \wedge \neg R) \wedge \neg S\big) \qquad (5)$$

Indication : construisez la table de vérité de $(P \wedge Q) \vee P$, que remarquez-vous ?

Solution. La table de vérité ci-dessous prouve que $(P \wedge Q) \vee P \equiv P$, autrement dit la valeur de vérité de la variable propositionnelle Q ne change pas la valeur de vérité de la formule, on peut donc “éliminer” cette variable et simplifier la formule.

P	Q	$P \wedge Q$	$(P \wedge Q) \vee P$
F	F	F	F
F	V	F	F
V	F	F	V
V	V	V	V

Table 8. Table de vérité de $(P \wedge Q) \vee P$.

On applique ce résultat au membre gauche de l'équivalence logique (5) :

$$\begin{aligned}\neg\Big(\big(((P \wedge Q) \vee P) \vee R\big) \vee S\Big) &\equiv \neg\big((P \vee R) \vee S\big)\\ &\equiv \neg(P \vee R) \wedge \neg S\\ &\equiv (\neg P \wedge \neg R) \wedge \neg S\end{aligned}$$

EXERCICE 17. Formalisez les énoncés suivants en logique propositionnelle :

(1) Bob a déchiffré le message d'Alice ou Alice est inquiète.
(2) Bob a déchiffré le message d'Alice et Alice n'est pas inquiète.
(3) Bob n'a pas déchiffré le message d'Alice et Alice est inquiète.
(4) Bob n'a pas déchiffré le message d'Alice ou Alice n'est pas inquiète.
(5) Si Bob a déchiffré le message d'Alice alors Alice n'est pas inquiète.
(6) Bob n'a pas déchiffré le message d'Alice si Alice est inquiète.

Solution. On définit deux variables propositionnelles A et B que l'on interprète par A vrai si *“Alice est inquiète”* et B vrai si *“Bob a déchiffré le message d'Alice”*.

(1) $B \vee A$ (3) $\neg B \wedge A$ (5) $B \Rightarrow \neg A$

(2) $B \wedge \neg A$ (4) $\neg B \vee \neg A$ (6) $A \Rightarrow \neg B$

EXERCICE 18. † Dans une brasserie vous commandez un *sandwich au jambon* ou un *sandwich au pâté* et un *verre de bière*. Le garçon vous écoute distraitement car il est occupé.

(1) Dans un premier temps il est sûr de la place du *ou* et du *et* mais il hésite sur la place des parenthèses.

(a) Écrire pour chacune des commandes possibles la formule propositionnelle correspondante.

(b) Pour être sûr de contenter le client, il doit satisfaire à la fois les deux commandes possibles. Écrire la formule correspondante.

(c) Montrez à l'aide d'une table de vérité que cette dernière est logiquement équivalente à apporter *(un sandwich au jambon ou un sandwich au pâté) et un verre de bière.*

(2) Dans un second temps le garçon hésite également sur la place de *et* et *ou*.

(a) Reprendre les questions (1a) et (1b).

(b) Montrez qu'il peut alors se contenter d'apporter *un sandwich au jambon et (un sandwich au pâté ou un verre de bière).*

(3) Que doit-il apporter au minimum pour satisfaire le client et répondre à *toutes* ses hésitations ?

Solution. On définit trois variables propositionnelles J, P et B dont la véracité est interprétée respectivement par *"Je commande un sandwich au jambon"*, *"Je commande un sandwich au pâté"* et *"Je commande une bière"*.

(1a) L'hésitation entre la place des parenthèses se traduit par

$$\underbrace{(J \vee P) \wedge B}_{X} \qquad \underbrace{J \vee (P \wedge B)}_{Y}.$$

(1b) La formule est $((J \vee P) \wedge B) \wedge (J \vee (P \wedge B))$, soit $X \wedge Y$.

(1c) On construit la table de vérité de la formule $X \wedge Y$ pour démontrer que l'on a l'équivalence logique $X \equiv (X \wedge Y)$.

J	P	B	$J \vee P$	$P \wedge B$	X	Y	$X \wedge Y$
F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F
F	V	F	V	F	F	F	F
F	V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F	V	F
V	F	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	F
V	V	V	V	V	V	V	V

Table 9. Tables de vérité des formules X et Y.

(2a) On reprend en permutant cette fois les connecteurs $\wedge$ et $\vee$:

$$\underbrace{(J \wedge P) \vee B}_{U} \qquad \underbrace{J \wedge (P \vee B)}_{V}.$$

(2b) On construit la table de vérité de la formule $U \wedge V$ pour démontrer que l'on a l'équivalence logique $V \equiv (U \wedge V)$. On y rappelle également la formule $X \wedge Y$ pour la question suivante :

J	P	B	$J \wedge P$	$P \vee B$	U	V	$U \wedge V$	$X \wedge Y$
F	F	F	F	F	F	F	F	F
F	F	V	F	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F	F	F	F
$\boldsymbol{V}$	F	$\boldsymbol{V}$	F	V	V	V	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$
V	V	F	V	V	V	V	V	F
$\boldsymbol{V}$	V	$\boldsymbol{V}$	V	V	V	V	$\boldsymbol{V}$	$\boldsymbol{V}$

Table 10. Tables de vérité des formules U et V.

(3) Comme on peut le constater dans les deux dernières colonnes de cette table, on peut satisfaire à la fois $U \wedge V$et $X \wedge Y$ pour l'interprétation $J \equiv V$ et $B \equiv V$, autrement dit si le serveur apporte un sandwich au

jambon et une bière, il est certain de satisfaire votre demande, même s'il l'a *vraiment* mal comprise.

EXERCICE 19. † Soit X, Y, Z des variables propositionnelles.

(1) Démontrez que la proposition suivante est une tautologie :

$$((X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z)) \Rightarrow (Y \vee Z) \qquad (\mathscr{T})$$

On définit trois variables propositionnelles E, R et S dont la valeur de vérité est associées à celle des énoncés suivants :

(E) Il y a un examen.

(R) Alexis révise ses cours.

(S) Alexis échoue.

On définit alors les trois propositions P, Q, T formalisant les énoncés suivants :

(P) S'il y a un examen, alors Alexis révise ses cours.

(Q) Si Alexis révise ses cours, alors Alexis n'échoue pas.

(T) S'il n'y a pas d'examen, alors Alexis n'échoue pas.

Répondez aux questions suivantes :

(2) Écrivez les formules P, Q et T en fonction des variables propositionnelles E, R et S.

(3) Transformez P, Q, T en propositions P', Q', T' ne contenant que des disjonctions ($\vee$) et des négations ($\neg$).

(4) En utilisant ($\mathscr{T}$), trouver une proposition U telle que la proposition $((P' \wedge Q') \Rightarrow U)$ soit une tautologie.

(5) En utilisant ($\mathscr{T}$), trouver une proposition V telle que la proposition $((T' \wedge U) \Rightarrow V)$ soit une tautologie.

(6) Que peut-on déduire sur la réussite d'Alexis à l'examen ?

Solution. (1) On peut évidemment démontrer que la proposition ($\mathscr{T}$) est une tautologie en construisant sa table de vérité et en vérifiant que les 8 interprétations possibles satisfont cette formule, mais on peut procéder autrement.

Une implication $A \Rightarrow B$ est toujours vraie si A est faux et n'est fausse que si A est vrai et B est faux. Ainsi, en notant A la formule $(X \vee Y) \wedge (\neg X \vee Z)$ et B la formule $Y \vee Z$, il suffit de démontrer que si A est vraie alors B est nécessairement vraie. Comme la formule A est une conjonction, elle ne peut être vraie que si les deux formules $X \vee Y$ *et* $\neg X \vee Z$ sont vraies. Or X et $\neg X$ ne peuvent être vraies simultanément, A ne peut donc être vraie que si l'un ou l'autre des autres termes de ces deux disjonctions est vrai, à savoir si Y est vrai ou Z est vrai.

(2) On a : $P \equiv E \Rightarrow R \qquad Q \equiv R \Rightarrow \neg S \qquad T \equiv \neg E \Rightarrow \neg S$.

(3) On a : $P' \equiv \neg E \vee R \qquad Q' \equiv \neg R \vee \neg S \qquad T' \equiv E \vee \neg S$.

(4) De ($\mathscr{T}$), on tire $\big((R \vee \neg E) \wedge (\neg R \vee \neg S)\big) \Rightarrow (\neg E \vee \neg S)$. On a donc $U \equiv (\neg E \vee \neg S)$ et $(P \wedge Q) \Rightarrow U$ est une tautologie.

(5) De même on déduit que $\big((E \vee \neg S) \wedge (\neg E \vee \neg S)\big) \Rightarrow (\neg S \vee \neg S)$. On a donc $V \equiv \neg S$ et $(T \wedge U) \Rightarrow V$ est une tautologie.

(6) On déduit de (3) et (4) que si les propositions P, Q et T sont satisfaites alors Alexis réussi son examen.

EXERCICE 20. † Trois suspects ont été arrêtés à la suite du cambriolage de la villa de Monsieur Futay, ce sont *Bradacié*, *Piedplat* et *Nécassé*. Ils déclarent respectivement à l'inspecteur *Lafrite* qui les interroge :

(P_B) « *Piedplat* est coupable et *Nécassé* est innocent. »

(P_P) « Si *Bradacié* est coupable, alors *Nécassé* l'est aussi. »

(P_N) « Je suis innocent mais l'un au moins des deux autres est coupable. »

C'est une nécessité pour *Lafrite* d'envisager plusieurs possibilités, c'est ce qu'il fait avant de se mettre au lit :

(1) Est-il possible que mes trois lascars aient dit la vérité ? Alors qui serait coupable ?

(2) Ils auraient pu mentir tous les trois, je suppose ! ?

(3) Un témoignage est équivalent à une formule des deux autres. Lequel ?

(4) Si je suppose que tous sont innocents, qui a menti ? Et si je les suppose tous coupables, qui a menti ?

(5) Est-il possible qu'il n'y ait qu'un seul faux témoignage ? Dans ce cas, qui a menti et qui est coupable ?

(6) Et je garde le meilleur pour la fin… Après ceci je dormirai comme un loir : si je suppose que l'innocent dit la vérité et que le coupable ment, alors qui est innocent et qui est coupable ?

Pouvez-vous aider l'inspecteur Lafrite à répondre à ces questions ?

Indication : utilisez les variables B, P et N dont la valeur de vérité est associée à l'innocence du suspect correspondant. Exprimez leurs déclarations à l'aide de formules propositionnelles et construisez leurs tables de vérité.

Solution. On définit les trois variables propositionnelles B, P et N dont la véracité est interprétée respectivement par *"Bradacié est innocent"*, *"Piedplat est innocent"* et *"Nécassé est innocent"*. Les déclarations des 3 suspects deviennent respectivement :

$$P_B \equiv \neg P \wedge N \qquad P_P \equiv \neg B \Rightarrow \neg N \qquad P_N \equiv N \wedge (\neg P \vee \neg B).$$

Puis on construit leurs tables de vérité (cf. table 11).

	B	P	N	P_B	P_P	P_N
1	F	F	F	F	V	F
2	F	F	V	V	F	V
3	F	V	F	F	V	F
4	F	V	V	F	F	V
5	V	F	F	F	V	F
6	V	F	V	V	V	V
7	V	V	F	F	V	F
8	V	V	V	F	V	F

Table 11. Tables de vérité des formules P_B, P_P et P_N.

(1) La réponse est oui puisqu'il existe une interprétation telle que les trois propositions P_B, P_P et P_N sont vraies, il s'agit de $B \equiv V$, $P \equiv F$, $N \equiv V$ (ligne 6). Le seul coupable serait alors Piedplat.

(2) La réponse est non puisqu'aucune interprétation ne permet d'avoir les trois déclarations fausses dans la table.

(3) On a

$$\begin{aligned} P_N &\equiv N \wedge (\neg P \vee \neg B) \\ &\equiv (N \wedge \neg P) \vee (N \wedge \neg B)) \\ &\equiv (N \wedge \neg P) \vee \neg(\neg N \vee B)) \\ &\equiv P_B \vee \neg(\neg B \Rightarrow \neg N) \\ &\equiv P_B \vee \neg P_P \end{aligned}$$

(4) Si tous sont innocents, i.e. $P \equiv B \equiv N \equiv V$, alors Bradacié et Nécassé ont menti (ligne 8). Si tous sont coupables, i.e. $P \equiv B \equiv N \equiv F$, c'est encore une fois Bradacié et Nécassé qui ont menti (ligne 1).

(5) Il n'y a qu'une interprétation pour laquelle il n'y a qu'un faux témoignage, celui de Piéplat (ligne 2) et dans ce cas le seul à être innocent est Nécassé.

(6) Cette condition impose que X et P_X doivent avoir la même valeur de vérité pour tout $X \in \{B, P, F\}$, seule la ligne 3 satisfait cette condition, autrement dit Piécassé est innocent et les deux autres sont coupables.