Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique UE-22.

TD 6. Probabilités [1]

Modélisation, espace probabilisé

EXERCICE 1. Proposez un univers des possibles Ω pour chacune des expériences aléatoires suivantes :

(1) On lance un dé à 6 faces.

(2) On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

(3) On lance une pièce de monnaie.

(4) On tire une boule d'une urne contenant 5 boules numérotées

(5) On observe la couleur des feux de circulation d'un carrefour à un instant donné.

(6) On lance deux dés à six faces identiques.

(7) Une personne choisit au hasard un jour de la semaine.

(8) On tire une boule d'une urne contenant 3 boules rouges, 2 bleues et 1 verte.

(9) On choisit au hasard une lettre dans le mot « mathématique ».

(10) On mesure le temps d'attente (arrondi à la minute) pour un bus, sachant qu'il en passe un toutes les 15 minutes.

Solution. **(1)** L'ensemble des issues se formalise « naturellement » avec l'univers $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

(2) Un codage proche des observations est possible, par exemple en définissant les ensembles $V := \{7, 8, 9, 10, V, D, R, A\}$ et $C = \{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$ et en posant $\Omega := V \times C$. On peut se contenter de $\Omega := [\![1, 32]\!]$ en *identifiant* chacune des 32 cartes par un numéro.

(3) L'ensemble des issues est par exemple $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$, mais on pourrait coder les résultats par $\Omega = \{0, 1\}$ en associant 0 à pile et 1 à face (ou le contraire).

(4) L'ensemble des issues est directement $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

(5) On observe la couleur des feux de circulation d'un carrefour à un instant donné. L'ensemble des issues est $\Omega = \{\text{Rouge}, \text{Orange}, \text{Vert}\}$. L'ensemble abstrait $\Omega = \{1, 2, 3\}$ suffit néanmoins à identifier les issues.

(6) Un premier codage possible est l'ensemble $\Omega = [\![1, 6]\!]^2$ des couples (a, b) dont les 2 projections sont des entiers de $[\![1, 6]\!]$. Ce modèle contient les 36 issues en faisant formellement le distinguo entre les deux dés, ce qui n'est pas exigé dans l'énoncé puisqu'il est précisé qu'ils sont identiques. On pourrait alors considérer $\Omega = \{\{1\}, \{1, 2\}, \ldots, \{5, 6\}, \{6\}\}$ avec 18 issues constituées de paires codant des issues avec deux valeurs distinctes et de singletons codant les issues avec deux valeurs identiques.

(7) L'ensemble des issues est littéralement le nom de chaque jour (en abrégé ici) $\Omega = \{\text{Lun}, \text{Mar}, \text{Mer}, \text{Jeu}, \text{Ven}, \text{Sam}, \text{Dim}\}$ mais on pouvait se contenter de $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$ en faisant une numérotation de ces jours dans l'ordre chronologique.

(8) L'ensemble des issues est par exemple $\Omega = \{\text{R}, \text{V}, \text{B}\}$.

(9) L'ensemble des issues est par exemple $\Omega = \{\texttt{m}, \texttt{a}, \texttt{t}, \texttt{h}, \texttt{e}, \texttt{i}, \texttt{q}, \texttt{u}\}$.

(10) L'ensemble des issues est « naturellement » $\Omega = [\![0, 15]\!]$.

Il est important de comprendre que ces modèles ont principalement été guidés par notre besoin de reconnaître facilement les issues de l'expérience et de faire le lien entre nos observations et leur codage. Abstraction faite de cet impératif cognitif, fondamentalement, l'espace Ω doit simplement être suffisamment riche pour être en mesure de *coder* toutes les issues.

EXERCICE 2. On rappelle qu'une partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu sur un ensemble Ω si elle contient la partie vide $\varnothing$, est stable par complémentation et pour l'intersection dénombrable.

(1) Exprimez formellement ces trois conditions en logique des prédicats.

(2) Déduisez de la propriété d'intersection dénombrable la propriété d'intersection finie.

Solution. **(1)** Les conditions sont les suivantes :

(1) $\varnothing \in \mathscr{F}$.

(2) $\forall A \in \mathscr{P}(\Omega) \quad (A \in \mathscr{F}) \Rightarrow (\overline{A} \in \mathscr{F})$.

(3) $\forall (A_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathscr{P}(\Omega)^{\mathbb{N}} \quad \big((\forall i \in \mathbb{N}\ A_i \in \mathscr{F}) \Rightarrow \bigcap_{i\in\mathbb{N}} A_i \in \mathscr{F}\big)$.

[1]. version du 27 mars 2025 [07:25]

(2) Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille finie de cardinal k d'évènements de la tribu, on peut sans restreindre la généralité considérer que $I = [\![1,k]\!]$ et définir les évènements

$$B_j := \begin{cases} A_j & \text{si } j \in [\![1,k]\!], \\ \Omega & \text{si } j > k. \end{cases}$$

L'ensemble Ω est l'élément neutre pour l'intersection, c'est-à-dire

$$\forall A \in \mathscr{P}(\Omega) \quad \Omega \cap A = A,$$

On a

$$\bigcap_{i=1}^{k} A_i = \bigcap_{j=1}^{k} B_j = \bigcap_{j=1}^{k} B_j \cap \bigcap_{j>n} \Omega = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n.$$

et la stabilité de l'intersection dénombrable de la famille $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nous permet de conclure.

EXERCICE 3. Une urne contient 10 boules numérotées de 1 à 10. On en tire une « au hasard ». Fournissez un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ pour cette expérience aléatoire.

Solution. Pour décrire l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ correspondant au tirage aléatoire d'une boule dans une urne contenant 10 boules numérotées de 1 à 10, nous procédons comme suit :

L'univers Ω est défini comme l'ensemble des résultats possibles du tirage $\Omega := \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$. La tribu est la tribu discrète $\mathscr{F} := \mathscr{P}(\Omega)$ et la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme puisque chaque boule a autant de « chances » d'être tirée qu'une autre. La probabilité de chaque évènement élémentaire $\{i\}$ avec $i \in \Omega$ est donnée par :

$$\mathbb{P}(\{i\}) = \frac{1}{10}, \quad \text{pour tout } i \in \{1,2,3,\dots,10\}.$$

Ainsi, pour tout événement $A \subseteq \Omega$, sa probabilité $\mathbb{P}(A)$ est donnée par

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i\in A} \mathbb{P}(\{i\}) = \frac{|A|}{10},$$

où $|A|$ désigne le cardinal de A. On a ainsi défini un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$.

EXERCICE 4. Montrez que les cinq conditions que doit satisfaire une algèbre de Boole sont en partie redondantes.

Solution. Soit $\mathscr{A}$ un ensemble de parties d'un ensemble Ω, i.e. $\mathscr{A} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$. Par définition $\mathscr{A}$ doit contenir les parties $\varnothing$ et Ω et être stable pour les opérations de complémentation, de réunion et d'intersection.

On va montrer que l'on peut se contenter des trois conditions suivantes : $\mathscr{A}$ contient $\varnothing$, est stable pour les opérations de complémentation et de réunion. Supposons donc que ces trois propriétés sont statisfaites et montrons que $\Omega \in \mathscr{A}$ et $\mathscr{A}$ est stable pour l'intersection :

Si $\varnothing \in \mathscr{A}$, par complémentation, $\mathscr{A}$ contient nécessairement $\Omega = \overline{\varnothing}$.

Soit $(A,B) \in \mathscr{A}^2$. Comme $\mathscr{A}$ est stable par complémentation, on a $\overline{A} \in \mathscr{A}$ et $\overline{B} \in \mathscr{A}$. D'autre part, $\mathscr{A}$ est stable pour la réunion, donc $\overline{A} \cup \overline{B} \in \mathscr{A}$ et on en déduit en appliquant de nouveau la stabilité par complémentation que $\overline{\overline{A} \cup \overline{B}} \in \mathscr{A}$, et finalement $A \cap B \in \mathscr{A}$ grâce aux lois de De Morgan.

On pourrait donc définir une algèbre de Boole avec ces trois conditions uniquement ou toute autre combinaison suffisante.

EXERCICE 5. Vérifiez que $\{\varnothing, \Omega\}$ et $\mathscr{P}(\Omega)$ sont des tribus sur Ω.

Solution. Pour $\{\varnothing, \Omega\}$, les deux premières propriétés d'une tribu sont évidentes, cet ensemble contient $\varnothing$ et pour tout $A \in \{\varnothing, \Omega\}$, son complémentaire $\overline{A} \in \{\varnothing, \Omega\}$ puisque $\overline{\varnothing} = \Omega$ et $\overline{\Omega} = \varnothing$. Pour finir, considérons une famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\{\varnothing, \Omega\}$ et A son intersection :

$$A := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{x \mid \forall n \in \mathbb{N} \ x \in A_n\}$$

Deux cas se présentent, il existe un entier k tel que $A_k = \varnothing$ ou tous les A_n sont égaux à Ω. Dans le premier cas, montrons que $A = \varnothing$ par l'absurde. Soit $x \in A$, donc par définition x appartient à tous les A_n et en particulier à $A_k = \varnothing$ ce qui est faux. Dans l'autre cas, une simple récurrence sur le prédicat $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \Omega$ montre que l'intersection est égale à Ω. Ainsi, $\{\varnothing, \Omega\}$ est bien une tribu.

L'ensemble $\mathscr{P}(\Omega)$ contient $\varnothing$ et le complémentaire $\overline{A}$ de toute partie $A \in \mathscr{P}(\Omega)$. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille dénombrable d'éléments de $\mathscr{P}(\Omega)$, alors on montre que leur intersection dénombrable $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{P}(\Omega)$ avec une récurrence sur le prédicat $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{P}(\Omega)$. Ainsi, $\mathscr{P}(\Omega)$ est une tribu.

EXERCICE 6. Soit Ω un univers au plus dénombrable. Démontrez que la tribu $\mathscr{E} := \sigma(\{\{\omega\} \mid \omega \in \Omega\})$ engendrée par les évènements élémentaires $\{\omega\}$ de Ω est égale à la tribu $\mathscr{P}(\Omega)$.

Solution. On a évidemment $\mathscr{E} \subseteq \mathscr{P}(\Omega)$, reste à montrer que que $\mathscr{P}(\Omega) \subseteq \mathscr{E}$. Si Ω est au plus dénombrable, on peut écrire $\Omega := \{\omega_i \mid i \in I\}$ où l'ensemble d'indexation I est au plus dénombrable[2]. Par conséquent la partie A est finie si Ω est fini et *au plus* dénombrable si Ω est dénombrable. Dans tous les cas on peut écrire $A := \{\omega_{i_j} \mid j \in J\}$ où J est un sous-ensemble de I, fini si I est fini, fini ou dénombrable si I est dénombrable et $i : J \to I$. On a donc

$$A = \bigsqcup_{j \in J} \{\omega_{i_j}\}$$

et en déduit que $A \in \mathscr{E}$ par stabilité de réunions finies ou dénombrables.

EXERCICE 7. On considère l'univers $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$.

(1) L'ensemble $\mathscr{A} := \{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\}$ est-il une tribu sur Ω ?

(2) Montrez que $\mathscr{F} := \{\varnothing, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \Omega\}$ est une tribu sur Ω.

Solution. L'univers Ω étant fini, une tribu est une algèbre de Boole, et on sait que les conditions à satisfaire sont redondantes d'après cet exercice, on peut donc se contenter de vérifier que l'ensemble contient $\varnothing$ et qu'il est stable par complémentation et par réunion.

(1) L'ensemble $\mathscr{A}$ ne contient pas la partie complémentaire de $\{1\}$, i.e. la partie $\{2, 3, 4\}$, ce n'est donc pas une tribu.

(2) L'ensemble $\mathscr{F}$ contient $\varnothing$. Les parties $\varnothing$ et Ω sont complémentaires, ainsi que les parties $\{1\}$ et $\{2, 3, 4\}$, $\mathscr{F}$ est donc stable par complémentation. Reste à montrer qu'il est stable par réunion. Il y a $\binom{4}{2} = 8$ paires à réunir pour s'en assurer, mais $\varnothing$ étant l'élément neutre et Ω l'élément absorbant pour la réunion, on peut se contenter de le vérifier pour les autres parties en lice :

$$\{1\} \cup \{2, 3, 4\} = \Omega.$$

L'ensemble $\mathscr{F}$ est donc une tribu de Ω.

2. Ce qui permet toujours de supposer que $I = [\![1, n]\!]$ s'il est fini ou que $I = \mathbb{N}$ s'il est dénombrable.

Probabilités conditionnelles

EXERCICE 8. Démontrez la loi de probabilité totale :

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $(B_i)_{i\in I}$ un système complet d'évènements au plus dénombrable et $A \in \mathscr{F}$. Alors

$$\mathbb{P}(A) := \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid B_i)\, \mathbb{P}(B_i). \tag{1}$$

Solution. Remarque liminaire : si une famille d'évènements $(B_i)_{i\in I}$ est au plus dénombrable, on peut toujours supposer que son ensemble d'indexation $I = [\![1, n]\!]$ dans le cas fini et $I = \mathbb{N}$ dans le cas dénombrable. Comme $(B_i)_{i\in I}$ est un système complet d'évènements de Ω et grâce à la distributivité de l'intersection sur la réunion, on peut écrire

$$A = A \cap \Omega = A \cap \bigsqcup_{i\in I} B_i = \bigsqcup_{i \in I} (A \cap B_i)$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= \mathbb{P}(\bigsqcup_{i\in I} (A \cap B_i)) \\ &= \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \cap B_i) \quad (\sigma\text{-additivité de } \mathbb{P}) \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid B_i)\, \mathbb{P}(B_i) \quad (\text{déf. probabilité conditionnelle}) \end{aligned}$$

EXERCICE 9. Démontrez la loi de Bayes :

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $A \in \mathscr{F}$ et $B \in \mathscr{F}$ satisfaisant $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors

$$\mathbb{P}(A \mid B) := \frac{\mathbb{P}(B \mid A)\, \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}. \tag{2}$$

Solution. On déduit de la définition de la probabilité conditionnelle que

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)) \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B)$$
$$\mathbb{P}(B \mid A) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(A)) \;\Rightarrow\; \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \mid A)\,\mathbb{P}(A)$$

Par transitivité de l'égalité, on tire

$$\mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \mid B)\,\mathbb{P}(A),$$

et on conclut que

$$\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(B \mid A)\frac{\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}.$$

EXERCICE 10. Démontrez que les évènements d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'évènements la globalement indépendants sont deux-à-deux indépendants.

Solution. Par définition, si les événements de la famille $(A_i)_{i\in I}$ sont globalement indépendants, alors pour tout sous-ensemble d'indexation fini J de I, on a

$$\mathbb{P}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \prod_{j\in J} \mathbb{P}(A_j).$$

et en particulier pour toute paire $J = \{i, j\}$ d'éléments de I, traduisant l'indépendance deux-à-deux des évènements A_i.

EXERCICE 11. On dispose de deux pièces de monnaie, l'une est équilibrée, l'autre est truquée et tombe sur *face* dans 80% des cas. Une pièce est choisie au hasard, puis lancée. Si le résultat est *face*, quelle est la probabilité que la pièce soit truquée ?

Solution. Il n'y a que 4 issues différentes dans cette expérience, la pièce utilisée est *truquée* ou *équilibrée* et le résultat du lancer est *pile* ou *face*, on peut donc définir l'univers $\Omega := \{t, e\} \times \{p, f\}$:

$$\Omega := \{(t,p), (t,f), (e,p), (e,f)\}.$$

On considère, comme toujours quand l'univers Ω est fini, la tribu discrète $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. On définit les évènements suivants :

- E : *« la pièce est équilibrée »*, i.e. $E = \{(e,p), (e,f)\}$.
- T : *« la pièce est truquée »*, i.e. $T = \{(t,p), (t,f)\}$.
- P : *« le résultat est pile »*, i.e. $P = \{(t,p), (e,p)\}$.
- F : *« le résultat est face »*, i.e. $F = \{(t,f), (e,f)\}$.

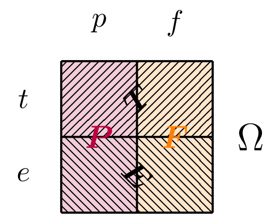

FIGURE 1. Les deux partitions $\{E, T\}$ et $\{P, F\}$ de Ω.

Notons que les évènements E et T (resp. P et F) sont complémentaires (cf. figure 1). Nous voulons calculer $\mathbb{P}(T \mid F)$, la probabilité que la pièce soit truquée sachant que le résultat est face. L'énoncé nous fournit la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(F \mid T) = 0{,}8$ et les probabilités que la pièce soit celle qui est truquée $\mathbb{P}(T) = 0{,}5$ ou celle qui est équilibrée $\mathbb{P}(E) = 0{,}5$ puisqu'elle est choisie « au hasard », c'est-à-dire suivant la probabilité uniforme.

La loi de Bayes nous donne :

$$\boxed{\mathbb{P}(T \mid F) = \frac{\mathbb{P}(F \mid T)\,\mathbb{P}(T)}{\mathbb{P}(F)}} \qquad (3)$$

Il ne reste qu'à calculer $\mathbb{P}(F)$. Comme les deux évènements E et T sont complémentaires et non-vides, il forment une partition de Ω, on peut donc appliquer la loi de la probabilité totale :

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(F \mid E)\,\mathbb{P}(E) + \mathbb{P}(F \mid T)\,\mathbb{P}(T).$$

Mais si la pièce est équilibrée, la probabilité qu'elle tombe sur pile est égale à celle qu'elle tombe sur face, ce qui nous fournit les deux probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(P \mid E) = \mathbb{P}(F \mid E) = 0{,}5$. Ainsi

$$\mathbb{P}(F) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 + 0{,}8 \cdot 0{,}5 = 0{,}65.$$

On conclut en substituant cette valeur dans l'égalité (3) :

$$\mathbb{P}(T \mid F) = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}5}{0{,}65} \approx 61{,}5\%.$$

EXERCICE 12. Considérons une famille de $n \geqslant 2$ enfants. Si on s'intéresse au genre (binaire) des enfants, il y a bien sûr 2^n combinaisons et on suppose qu'elles sont équiprobables. Observons les deux évènements suivants :

A : *« la famille a des enfants des 2 sexes »*

B : *« la famille a au plus une fille »*.

(1) Vérifiez l'indépendance ou non de ces évènements pour $n = 3$ et $n = 4$.

(2) Calculez $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$ pour n quelconque et calculez les valeurs de n pour lesquelles les deux évènements sont indépendants.

Solution. **(1)** On choisit comme univers $\Omega := \{g, f\}^n$ équipé de la probabilité uniforme :

$$\forall \omega \in \Omega \quad \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{2^n}.$$

Calculons directement les probabilités nécessaires dans le cas général. On constate aisément que l'évènement A est le complémentaire de l'évènement *« tous les enfants de la familles sont du même sexe »* correspondant à la paire $\{(g, \ldots, g), (f, \ldots, f)\}$ dont la probabilité est donc

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{2}{2^n}.$$

L'évènement B est la partie contenant le n-uplet $(g, \ldots, g)$ et les n-uplets dont une seule projection est égale à f, donc de cardinal $n + 1$ et de probabilité $\frac{n+1}{2^n}$. L'évènement $A \cap B$ est clairement l'évènement B privé de l'évènement élémentaire $(g, \ldots, g)$ et donc de cardinal n ayant pour probabilité $\frac{n}{2^n}$. On a donc

$$\mathbb{P}(A) = \frac{2^n - 2}{2^n}, \quad \mathbb{P}(B) = \frac{n+1}{2^n}, \quad \mathbb{P}(A \cap B) = \frac{n}{2^n}.$$

Pour $n = 3$ on obtient $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{4}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{8}$. Par conséquent $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B)$ et les deux évènements sont indépendants.

En revanche, pour $n = 4$, on obtient $\mathbb{P}(A)\,\mathbb{P}(B) = \frac{7}{8} \cdot \frac{5}{16} = \frac{35}{128}$ mais $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$.

(2) On doit résoudre l'équation d'inconnue n suivante :

$$\frac{(2^n - 2)(n + 1)}{2^{2n}} = \frac{n}{2^n}.$$

on en déduit

$$(2^n - 2)(n + 1) = n2^n,$$

et finalement

$$2^{n-1} = n + 1. \tag{4}$$

On peut vérifier que cette équation est satisfaite pour $n = 3$ qui est nécessairement la seule solution puisque $n + 1 = o(2^n)$. L'indépendance de ces deux évènements n'est donc qu'une coïncidence numérique.

EXERCICE 13. Dans une famille avec deux enfants, l'un des deux est un garçon. Quelle est la probabilité que l'autre soit un garçon ?

Solution. La tentation est grande d'affirmer que l'autre enfant a autant de chances d'être une fille qu'un garçon et donc que la probabilité qu'il soit un garçon est de $\frac{1}{2}$, ce qui est faux. Ce « paradoxe » n'est qu'apparent, il est surtout causé par l'imprécision (volontaire ici) de l'énoncé, ce qui est souvent le cas dans les questions concrètes relevant de la théorie des probabilités. Il est donc essentiel de lever les implicites afin de pouvoir le modéliser correctement, ou mettre en évidence qu'il manque des hypothèses pour ce faire.

L'énoncé omet de dire que :

(1) chaque enfant a une probabilité égale d'être un garçon ou une fille.

(2) le sexe du deuxième enfant est indépendant de celui du premier.

(3) le garçon mentionné est l'aîné ou non. Il faut donc supposer qu'il s'agit de l'un des deux sans distinction d'ordre de naissance.

On définit l'univers Ω comme l'ensemble des couples $(x, y) \in \{f, g\}^2$, la première projection x désignant le sexe du premier enfant, la deuxième projection y celui du deuxième enfant.

La probabilité recherchée est la probabilité conditionnelle de l'évènement A *« Les deux enfants de la fratrie sont des garçons »* sachant l'évènement B *« la fratrie comporte au moins un garçon »*. On a

$$A = \{(g, g)\} \quad \text{et} \quad B = \{(g, f), (f, g), (g, g)\}.$$

Avec les deux premières hypothèses, les 4 issues (g, g), (g, f), (f, g) et (f, f) étant équiprobables, on a

$$\forall (x, y) \in \{f, g\}^2 \quad \mathbb{P}\big(\{(x, y)\}\big) = \frac{1}{4}. \tag{5}$$

Il faut donc calculer

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \mid B) &= \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\{(g,g)\})}{\mathbb{P}(\{(g,f),(f,g),(g,g)\})} \\ &= \left(\frac{1}{4}\right) / \left(\frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

EXERCICE 14. Dans une usine, la production de souris sans fil est réalisée par deux machines A et B qui en produisent respectivement 400 et 600 quotidiennement. La machine A produit 2% de pièces défectueuses et la machine B en produit 3%. En fin de journée, quelle est la probabilité pour qu'une souris défectueuse ait été fabriqué par la machine A ?

Solution. Cette fois nous ne détaillerons pas l'espace probabilisé afin de montrer que l'on peut souvent en faire l'économie. On considère les évènements suivants :

- A : « la souris a été fabriquée par la machine A ».
- B : « la souris a été fabriquée par la machine B ».
- D : « la souris est défectueuse ».

Notons immédiatement que les évènements A et B sont complémentaires, i.e. $B = \overline{A}$, ils forment donc une partition de l'espace probabilisé. L'énoncé nous fournit les probabilités conditionnelles

$$\mathbb{P}(D \mid A) = \frac{2}{100}, \qquad \mathbb{P}(D \mid B) = \frac{3}{100}.$$

La production de ces deux machines nous permet de calculer

$$\mathbb{P}(A) = \frac{400}{400+600} = \frac{40}{100}, \qquad \mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(A) = \frac{60}{100}.$$

Nous cherchons à calculer $\mathbb{P}(A \mid D)$, la probabilité qu'une souris défectueuse ait été produite par la machine A. La loi de Bayes nous donne

$$\mathbb{P}(A \mid D) = \frac{\mathbb{P}(D \mid A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(D)},$$

où $\mathbb{P}(D)$ est la probabilité qu'une souris soit défectueuse. On la calcule à l'aide de la loi de la probabilité totale appliquée à la partition $\{A, B\}$ de l'univers :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(D) &= \mathbb{P}(D \mid A)\,\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(D \mid B)\,\mathbb{P}(B) \\ &= 0{,}02 \cdot 0{,}4 + 0{,}03 \cdot 0{,}6 \\ &= 0{,}008 + 0{,}018 \\ &= 0{,}026.\end{aligned}$$

On peut enfin calculer $\mathbb{P}(A \mid D)$:

$$\mathbb{P}(A \mid D) = \frac{0{,}02 \cdot 0{,}4}{0{,}026} = \frac{0{,}008}{0{,}026} \approx 0{,}31.$$

La probabilité qu'une souris défectueuse ait été fabriquée par la machine A est d'environ 31%.

EXERCICE 15. † Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $S \in \mathscr{F}$ tel que $\mathbb{P}(S) > 0$. Soit $(B_i)_{i\in I}$ un système complet au plus dénombrable d'évènements de Ω. Démontrez la loi de probabilité totale pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_S$:

$$\forall A \in \mathscr{F} \quad \mathbb{P}_S(A) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}_S(A \mid B_i)\,\mathbb{P}_S(B_i). \tag{6}$$

Solution. Par définition de la probabilité conditionnelle,

$$\mathbb{P}_S(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap S)}{\mathbb{P}(S)} \tag{7}$$

Puisque $(B_i)_{i\in I}$ est un système complet d'évènements de Ω, les évènements $(A \cap S) \cap B_i$ sont deux-à-deux disjoints et forment un système complets d'évènements de $A \cap S$ et ainsi

$$A \cap S = \bigsqcup_{i\in I} (A \cap S) \cap B_i.$$

Par σ-additivité de $\mathbb{P}$, commutativité et associativité de $\cap$, on a

$$\mathbb{P}(A \cap S) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(A \cap (B_i \cap S)) \tag{8}$$

En substituant dans (7) :

$$\mathbb{P}_S(A) = \frac{1}{\mathbb{P}(S)} \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \cap (B_i \cap S)) \tag{9}$$

La définition de la probabilité conditionnelle nous donne pour tout $i \in I$:

$$\mathbb{P}(A \cap (B_i \cap S)) = \mathbb{P}(A \mid B_i \cap S)\, \mathbb{P}(B_i \cap S)$$

Mais aussi $\mathbb{P}(B_i \cap S) = \mathbb{P}(B_i \mid S)\, \mathbb{P}(S) = \mathbb{P}_S(B_i)\, \mathbb{P}(S)$, donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_S(A) &= \frac{1}{\mathbb{P}(S)} \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid B_i \cap S)\, \mathbb{P}_S(B_i)\, \mathbb{P}(S) \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}(A \mid B_i \cap S)\, \mathbb{P}_S(B_i) \\ &= \sum_{i \in I} \mathbb{P}_S(A \mid B_i)\, \mathbb{P}_S(B_i) \end{aligned}$$

Divers

EXERCICE 16. Un joueur participe au *Loto Foot* et doit pronostiquer l'issue de 4 rencontres. Pour chacun des matchs, il doit cocher l'une des trois possibilités $\boxed{1}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{2}$ codant respectivement la victoire de l'équipe à domicile, le match nul et la victoire de l'équipe à l'extérieur.

(1) Quel est le nombre r d'issues différentes possibles ?

(2) En déduire la probabilité qu'il trouve les 4 bons résultats ?

(3) Quelle est la probabilité qu'il trouve au moins 3 bons résultats ?

(4) Une grille de *Loto Foot* coute 1€. Le joueur qui trouve tous les bons résultats touche 40€ et 4€ s'il en trouve trois, rien sinon. Quelle est son espérance de gain ?

(5) Quand un joueur valide une grille, combien de résultats lui font gagner de l'argent ?

(6) Combien de grilles sont nécessaires au minimum t pour couvrir tous les résultats possibles ?

(7) En supposant que ce minimum soit atteint, quelle est la probabilité de trouver ces t grilles en les tirant au hasard ?

(8) Dans un tableau 9×9 dont les lignes et les colonnes sont indexées par 11, 1N, 12, N1, NN, N2, 21, 2N, 22, numérotez de 1 à 9 les 9 cases associées aux 9 grilles

$$\text{NNNN}, \text{N121}, \text{N212}, \text{1N22}, \text{111N}, \text{12N1}, \text{2N11}, \text{21N2}, \text{222N}. \tag{10}$$

L'abscisse (resp. l'ordonnée) correspond aux deux premières (resp. dernières) valeurs. Inscrivez dans chacune des 72 cases restantes les numéros des grilles qui font fait gagner cette issue. Que remarquez-vous ?

Solution. (1) En notant $X := \{1,\text{N},2\}$ l'ensemble des possibilités d'issues d'un unique match, les 4 rencontres sont codées par un quadruplet de X^4 dont le cardinal est $3^4 = 81$.

(2) Puisque la distribution est uniforme, la probabilité de trouver les 4 bons résultats est de $1/81$.

(3) Il doit donc trouver exactement 3 bons résultats ou 4 bons résultats. La probabilité de trouver exactement 3 bons résultats est obtenue grâce à la loi binomiale :

$$\binom{4}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{81}.$$

La probabilité de trouver au moins 3 bons résultats est donc de

$$\frac{1}{81} + \frac{8}{81} = \frac{1}{9}.$$

(4) En notant X la v.a. correspondant au gain, et en retirant l'euro qui a servi à l'achat de la grille on a

$$\mathbb{E}(X) = \left(40 \cdot \frac{1}{81} + 4 \cdot \frac{8}{81}\right) - 1 = -\frac{9}{81} = -\frac{1}{9} \approx -0{,}11€.$$

(5) On peut envisager la question en considérant que sa grille doit comporter au plus une erreur. Pour chacun des 4 matchs, l'un des deux autres pronostics est sorti, ce qui fait 8 résultats possibles avec une erreur. Avec le résultat correspondant exactement au pronostic du joueur, il y a donc 9 résultats possibles qui le font gagner.

(6) Comme il y a 81 résultats différents possibles, il est clair qu'il faudrait au miminum $\frac{81}{9} = 9$ grilles pour recouvrir toutes les issues possibles. Cette borne ne serait atteinte que si les 9 classes formées par les 9 issues couvertes par chacune des 9 grilles jouées formaient une partition de l'ensemble des issues.

(7) En supposant qu'une telle solution existe, la probabilité de la trouver est de
$$\frac{1}{\binom{81}{9}} = \frac{1}{260\,887\,834\,350}.$$

(8) Plutôt que des numéros, on a colorié les cases avec 9 couleurs différentes, les 9 grilles (10) sont repérées par des puces. Il s'agit bien d'une partition de l'ensemble des issues.

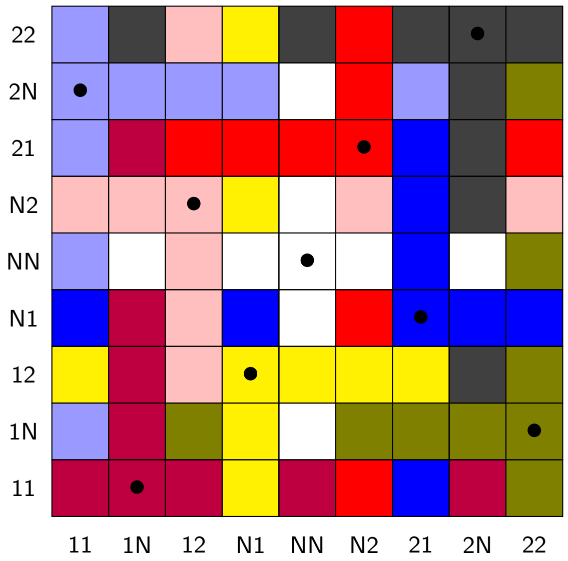

Figure 2. Recouvrement parfait des grilles du Loto-Foot.

On peut montrer (c'est un résultat de théorie des codes nettement plus difficile) qu'il y a 2 694 720 symétries possibles de cette combinaison de 9 grilles qui recouvrent toutes les issues. La probabilité de trouver un recouvrement parfait au hasard est en réalité égale à
$$\frac{2\,694\,720}{260\,887\,834\,350} \approx 10{,}33 \times 10^{-6}.$$

EXERCICE 17. † **(1)** Une urne contient 50 boules blanches et 50 boules noires. Les boules de même couleur sont indistinguables entres elles. Un joueur tire une unique boule de l'urne. Quelle est la probabilité qu'elle soit blanche ?

(2) Une urne contient 100 boules numérotées de 1 à 100 et un joueur cherche à retrouver la boule numéro v. Pour ce faire, il peut retirer jusqu'à 50 boules de l'urne. Quelle est la probabilité qu'il retrouve cette boule ?

(3) Vérifier que la probabilité obtenue pour ces deux expériences est la même. En quoi ces deux expériences sont « équivalentes » ?

Solution. On rappelle qu'on qualifie de *tirage avec remise* une expérience répétée consistant à tirer un objet au hasard dans un ensemble d'objets et à le replacer dans cet ensemble. Formellement cela revient à recommencer la même expérience plusieurs fois sans changer de modèle probabiliste à chaque nouvelle expérience et à supposer que les expériences sont toutes indépendantes. En revanche avec un *tirage sans remise*, l'univers probabiliste considéré est modifié à chaque nouvelle expérience, l'univers considéré contient un élément de moins et les expériences ne sont plus indépendantes, la fonction de probabilité de l'expérience courante est dépendante des évènements passés.

(1) On considère l'univers
$$\Omega := \{b_1, \ldots, b_{50}, n_1, \ldots, n_{50}\},$$
la tribu discrète $\mathscr{F} := \mathscr{P}(\Omega)$ et la probabilité uniforme $\mathbb{P}$ sur Ω. L'évènement *« tirer une boule blanche »* définit la partie $B := \{b_1, \ldots, b_{50}\}$ et donc
$$\mathbb{P}(B) = \frac{|B|}{|\Omega|} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}.$$

(2) Nous allons résoudre ce problème avec différents modèles probabilistes. Commençons par celui qui calque au plus près l'expérience et qui s'avère le plus compliqué.

Modèle a. Compte tenu de l'expérience, le numéro v de la boule choisi par le joueur n'a aucun importance, on peut donc supposer que $v = 1$. On va considérer chaque tirage comme une expérience individuelle avec autant d'espaces probabilisés $(\Omega_k, \mathscr{P}(\Omega_k), \mathbb{P}_k)$. L'expérience numéro k consiste à tirer une boule parmi $100 - k + 1$ boules numérotées de 1 à $100 - k + 1$ en définissant $\Omega_k := [\![1, 100 - k + 1]\!]$ pour $1 \leqslant k \leqslant 50$. L'évènement B_k

désigne le succès, on a trouvé la boule 1. Le tirage étant équiprobable, on a bien sûr

$$\mathbb{P}_k(B_k) = \frac{1}{|\Omega_k|} = \frac{1}{101-k} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_k(\overline{B_k}) = 1 - \mathbb{P}(B_k) = \frac{100-k}{101-k}.$$

L'expérience globale est la suite de ces expériences individuelles. L'univers correspondant est l'ensemble des séquences tronquées :

$$\Omega := \left(\bigcup_{k=1}^{50} \underbrace{\overline{\{1\}}^{k-1} \times \{1\}}_{k-\text{uplets}} \right) \cup \overline{\{1\}}^{50}.$$

En effet, en notant ω_i le numéro de la i-ème boule tirée, Ω réunit d'une part tous les k-uplets $(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}, \omega_k = 1)$ de valeurs différentes de 1 sauf la k-ème, codant les évènements *« on ne trouve la boule 1 qu'après $k-1$ échecs »*, et d'autre part tous les 50-uplets ne contenant jamais la valeur 1 codant l'évènement *« les 50 tentatives de trouver 1 ont échoué »*. L'événement E_k correspondant à un succès au k-ième tirage est défini par :

$$E_k = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \overline{B_i} \right) \cap B_k$$

Et par conséquent

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(E_k) &= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}_i(\overline{B_i}) \right) \times \mathbb{P}(B_k) \\
&= \left(\prod_{i=1}^{k-1} \frac{100-i}{101-i} \right) \times \frac{1}{101-k} \\
&= \frac{99}{100} \times \frac{98}{99} \times \frac{97}{98} \cdots \times \frac{101-k}{102-k} \times \frac{1}{101-k} \\
&= \frac{1}{100}.
\end{aligned}$$

L'événement E *« tirer la boule 1 en au plus 50 tentatives »* est donné par :

$$E = \bigsqcup_{k=1}^{50} E_k.$$

Les évènements E_k sont mutuellement exclusifs, on peut donc sommer les probabilités :

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{k=1}^{50} \mathbb{P}(E_k) = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}.$$

Modèle b. On ouvait reconnaître dans cette expérience un cas particulier de la la loi hypergéométrique $\mathscr{H}(N = 100, K = 1, n = 50)$, qui modélise la probabilité d'obtenir $k \leqslant K$ succès après n tirages sans remise :

$$f_X(k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}} \quad \text{et donc} \quad f_X(1) = \frac{\binom{1}{1}\binom{99}{49}}{\binom{100}{50}} = \frac{1}{2}$$

Modèle c. Considérons l'expérience qui consiste à tirer 50 boules de l'urne et à les ranger dans un sac et ensuite de vérifier si le sac contient la boule 1. La probabilité que le sac contienne la boule 1 est égale à celle que la boule 1 soit trouvée en effectuant 50 tentatives au plus. Pour s'en convaincre, il suffit de modifier la première expérience en continuant à tirer une boule après que la boule 1 a été tirée tant qu'on n'en a pas tiré 50. Il est clair que les tirages surnuméraires ne changent pas la probabilité de tirer la boule 1 en au plus 50 tirages.

Il suffit dans ce cas de dénombrer combien de parties à 50 éléments de $[\![1, 100]\!]$ contiennent la valeur 1. Pour constituer une telle partie, il faut choisir 49 valeurs parmi les 99 restantes, il y en a donc

$$\binom{49}{99}.$$

Et on le nombre de parties à 50 éléments dans un ensemble de 100 éléments est égal à

$$\binom{100}{50}.$$

Autrement dit la probabilité cherchée est

$$\mathbb{P}(E) = \frac{\binom{99}{49}}{\binom{100}{50}} = \frac{99!}{50!\,49!} \frac{50!\,50!}{100!} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

Ce résultat, obtenu via une approche combinatoire, montre que la première modélisation détaillée des expériences individuelles, bien que fidèle à la réalité physique du tirage, est inutilement lourde.

(3) Les deux expériences, bien que différentes, aboutissent à la même probabilité $\frac{1}{2}$, le rapport entre le nombre d'issues favorables et le nombres total d'issues. On pouvait également englober le jeu de pile ou face encore plus simple dans la comparaison. Le choix du modèle décrivant formellement une expérience, peut impacter sensiblement les calculs.

EXERCICE 18. Un dé à six faces est pipé de sorte que la probabilité d'obtenir un 6 est deux fois plus grande que celle d'obtenir n'importe quel autre chiffre. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ?

Solution. On pose $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$ et $\mathscr{F} = \mathscr{P}(\Omega)$. On note p la probabilité d'obtenir une valeur différente de 6, on a donc :

$$\mathbb{P}(\{i\}) := \begin{cases} p & \text{si } i \in [\![1,5]\!]. \\ 2p & \text{si } i = 6. \end{cases}$$

La famille d'évènements élémentaires $(\{i\})_{i\in[\![1,6]\!]}$ formant une partition de Ω, la loi de la probabilité totale nous donne

$$\mathbb{P}(\{1\}) + \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{3\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{5\}) + \mathbb{P}(\{6\}) = 1.$$

En substituant les valeurs, on en déduit que $5p + 2p = 1$ et par conséquent que $p = \frac{1}{7}$. L'évènement *« la valeur est paire »* est associé à la partie $\{2,4,6\}$. La loi de la probabilité totale nous donne cette fois $P(\{2,4,6\}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\})$ et en substituant les probabilités obtenues précédemment :

$$P(\{2,4,6\}) = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{2}{7} = \frac{4}{7}.$$

EXERCICE 19. † On note H_k et S_k les sommes suivantes :

$$H_k := \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i} \qquad S_k := \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k+i}. \tag{11}$$

(1) Écrivez les fonctions *Python* `H(k)` et `S(k)` qui calculent ces sommes. Quelle est la valeur arrondie à 3 décimales après la virgule de $S(50)$?

(2) Calculez la limite suivante, si elle existe :

$$\lim_{k\to\infty} \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k+i}}_{S_k} \tag{12}$$

Solution. **(1)** Rien de bien compliqué :

```python
def H(k):
    somme = 0
    for i in range (1,k+1):
        somme += 1/i
    return somme
```

```python
def S(k):
    somme = 0
    for i in range (1,k+1):
        somme += 1/(k+i)
    return somme
```

On obtient $S(50) \approx 0{,}688$.

(2) On rappelle que la série harmonique, de terme général $\frac{1}{n}$ dont la somme partielle est notée H_n est divergente. Il est facile de voir que la somme S_k dans l'expression (12) n'est autre que la somme partielle H_{2k} tronquée de ses k premiers termes, autrement dit de H_k :

$$S_k = H_{2k} - H_k.$$

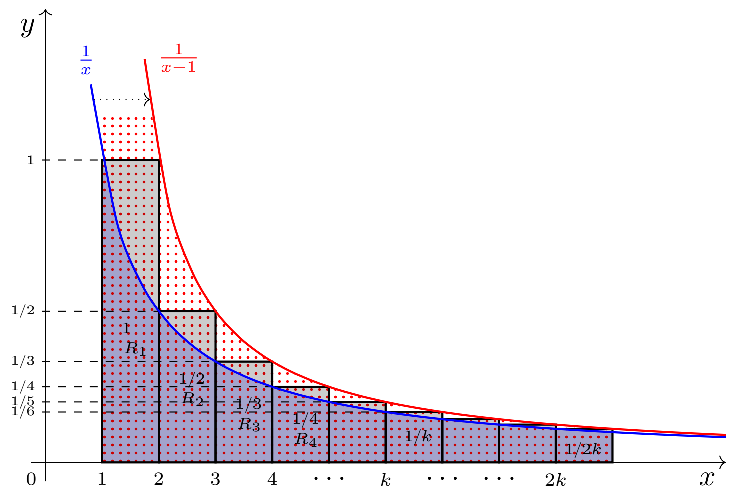

Figure 3. Encadrement de la somme par deux intégrales.

Malheureusement cette somme ne s'exprime pas avec une formule fermée qui permettrait de calculer aisément sa limite. On peut en revanche l'encadrer par deux intégrales plus faciles à calculer (cf. figure 3). Chaque terme $\frac{1}{k}$ de la série harmonique est la surface du rectangle R_k de largeur 1 et de hauteur $\frac{1}{k} = f(k)$ pour la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$. La surface de ce rectangle est minorée par l'aire de la courbe de f et majorée par celle de la courbe de $g := f - 1$ entre les abscisses k et $k+1$ qui est celle de f entre les abscisses $k-1$ et k :

$$\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\} \quad \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x < \frac{1}{k} < \int_{k-1}^{k} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \tag{13}$$

De laquelle on déduit

$$\forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\} \quad \int_{k+1}^{2k+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x < \underbrace{\sum_{i=k+1}^{2k} \frac{1}{i}}_{=S_k} < \int_{k}^{2k} \frac{1}{x}\mathrm{d}x$$

donc pour tout entier $k \notin \{0,1\}$,

$$\begin{aligned} [\ln(x)]_{k+1}^{2k+1} &< S_k < [\ln(x)]_k^{2k} \\ \ln(2k+1) - \ln(k+1) &< S_k < \ln(2k) - \ln(k) \\ \ln(\tfrac{2k+1}{k+1}) &< S_k < \ln(2) \\ \ln(1+\tfrac{k}{k+1}) &< S_k < \ln(2) \end{aligned} \tag{14}$$

On conclut donc que

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{k+i} = \ln(2)$$

EXERCICE 20. † Cet exercice est à traiter après l'étude du chapitre sur les groupes et en particulier le groupe des permutations S_n.

Un tyran propose à 100 prisonniers politiques d'éviter collectivement la peine capitale s'ils trouvent chacun leur nom dans des casiers numérotés de 1 à 100. Chaque détenu peut ouvrir jusqu'à 50 casiers. S'ils trouvent *tous* leur nom, ils sont graciés, sinon ils sont *tous* exécutés.

NB. Seul le détenu qui cherche son nom a accès aux casiers qui sont refermés après son passage et il ne peut pas communiquer avec les autres détenus. En revanche les détenus peuvent établir une stratégie, prendre des notes et les conserver avant d'accéder aux casiers.

(1) Les détenus n'établissent aucune stratégie et chacun d'entre eux ouvre les casiers *"au hasard"*. Quelle est la probabilité qu'ils soient graciés ? Quelle est la loi de probabilité associée ?

(2) Les détenus décident de la stratégie suivante : avant d'être appelés, chacun choisit au hasard un numéro de casier différent de celui des autres codétenus ; ensuite chaque détenu devra ouvrir le casier dont le numéro est celui qu'il a choisi, si le nom du détenu qui s'y trouve n'est pas le sien, il recommence avec le casier dont le numéro est celui de ce détenu et ainsi de suite.

Démontrez qu'en procédant ainsi, la probabilité que tous les détenus soient graciés est proche de 31%. Indications : montrez que chaque détenu suit les valeurs d'un cycle de la permutation qu'ils ont fixée en tirant leurs numéros au hasard. Calculez le nombre de permutations de S_{100} contenant un cycle de longueur strictement supérieure à 50.

Solution. (1) Cette expérience s'apparente à un tirage sans remise d'une boule dans une urne contenant 100 boules numérotées répété un maximum de 50 fois et nous avons vu dans l'exercice 17 que cette expérience est équivalente à un tirage unique d'une boule dans une urne contenant 50 boules blanches et 50 boules noires. La probabilité qu'un détenu trouve son casier est donc

$$\mathbb{P}(\text{« \textit{un détenu trouve son casier} »}) = \frac{1}{2}.$$

Comme les détenus ne peuvent pas communiquer, les expériences sont toutes identiques et indépendantes. Autrement dit la probabilité que les 100 détenus trouvent chacun leur casier est

$$\mathbb{P}(\text{« \textit{tous les détenus trouvent leurs casiers} »}) = 2^{-100} \approx 10^{-30}.$$

(2) En notant $\sigma(i)$ le numéro du détenu dans le casier numéro i pour chaque casier $i \in [100]$, on définit une permutation de S_{100}. En parcourant les casiers de cette manière, le détenu numéro i construit un p-cycle en commençant par $\sigma(i)$ contenu dans le casier i qu'il ouvre en premier :

$$\begin{array}{lccccccc} \text{n° casier :} & i & \sigma(i) & \sigma^2(i) & \sigma^3(i) & \cdots & \sigma^{p-1}(i) & \\ & \downarrow\ \nearrow & \downarrow\ \nearrow & \downarrow\ \nearrow & & & \nearrow\ \downarrow & \\ \text{contenu :} & \sigma(i) & \sigma^2(i) & \sigma^3(i) & \cdots & \sigma^{p-1}(i) & i & \end{array}$$

et c'est le dernier casier du p-cycle qui contient son nom. Par conséquent, si tous les cycles de la décomposition en produit de cycles de σ sont de longueur inférieure ou égale à 50, les détenus sont sauvés.

En dénombrant parmi les 100! permutations de S_{100}, celles qui contiennent un cycle de longueur strictement supérieure à 50, le reste sera le nombre de permutations «gagnantes». Afin de généraliser le problème à des tailles arbitraires et étudier le comportement asymptotique des probabilités, nous allons dénombrer les permutations contenant un cycle de longueur strictement supérieure à k dans le groupe S_{2k}.

Le calcul n'est pas très compliqué, il nous faut construire une permutation $\sigma = \rho\nu$ composée d'un cycle $\rho := (s_1\, s_2\, \cdots\, s_p)$ de longueur $p > k$ et d'une permutation quelconque ν sur les éléments restants hors du cycle. Le nombre de p-uplets est donné par le nombre d'injections de $[p]$ dans $[n]$, autrement dit $n!/(n-p)!$ Comme chacune des p permutations circulaires d'un p-uplet code le même p-cycle, on a

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-p+1)}{p} = \frac{n!}{(n-p)!\,p}$$

cycles de longueur p distincts. Pour achever la construction de la permutation σ, les $n-p$ valeurs qui ne sont pas dans le support du cycle ρ peuvent être rangées de manière arbitraire pour construire ν, soit de $(n-p)!$ façons, autrement dit, il y a

$$\underbrace{\frac{n!}{(n-p)!\,p}}_{\#\rho}\,\underbrace{(n-p)!}_{\#\nu} = \frac{n!}{p}.$$

permutations de S_n contenant un cycle de longueur p. Le nombre total de permutations contenant un p-cycle tel que $p > k$ est donc

$$\sum_{p=k+1}^{2k} \frac{n!}{p}.$$

L'expérience aléatoire consiste ici à tirer une permutation σ au hasard dans l'ensemble S_{2k} des permutations de degré $2k$. La probabilité de l'évènement C défini par *«σ contient un cycle de longueur $p > k$»* est donc

$$\mathbb{P}(C) = \frac{1}{n!}\sum_{p=k+1}^{2k}\frac{n!}{p} = \sum_{p=k+1}^{2k}\frac{1}{p} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{k+i}}_{S_k}.$$

Nous avons encadré la somme S_k dans l'exercice 19 (cf. (14)) :

$$\ln\left(2 - \frac{1}{k+1}\right) < S_k < \ln(2)$$

ce qui nous donne pour $k = 50$:

$$0,68329 < \mathbb{P}(C) < 0,69315$$

et la probabilité que les détenus soient sauvés est donc

$$1 - \mathbb{P}(C) \approx 31\%$$

Le script *Python* proposé dans le même exercice calculait la valeur 31,18%.

Lois de probabilité

EXERCICE 21. Une application enregistre l'état d'un serveur toutes les minutes. Chaque minute, la probabilité que le serveur soit actif est égale à p, indépendamment des autres minutes.

(1) Modélisez l'état du serveur sur une minute donnée avec une loi de probabilité.

(2) Si $p = 0{,}95$, quelle est la probabilité qu'il soit inactif exactement 3 minutes pendant une heure d'observation ?

(3) Quelle est la probabilité qu'il ne soit jamais inactif durant cette heure ?

Solution. **(1)** L'état X du serveur sur une minute donnée suit une loi de Bernoulli $\mathscr{B}(p)$ de paramètre p, où :

$$X = \begin{cases} 1, & \text{si le serveur est actif,} \\ 0, & \text{si le serveur est inactif.} \end{cases}$$

(2) Soit Y le nombre de minutes durant lesquelles le serveur est inactif pendant une heure. Comme chaque minute est indépendante et suit une loi de Bernoulli de paramètre $1-p$, la v.a. Y suit la loi binomiale $\mathscr{B}(60, 1-p)$. On calcule donc $\mathbb{P}(Y = 3)$ pour $p = 0{,}95$, soit $1 - p = 0{,}05$:

$$\mathbb{P}(Y = 3) = \binom{60}{3}(0{,}05)^3(0{,}95)^{57} \approx 0{,}23.$$

(3) La probabilité que le serveur ne soit jamais inactif sur une heure est donnée par

$$P(Y = 0) = (0{,}95)^{60} \approx 0{,}046.$$

donc de l'ordre de 5%.

EXERCICE 22. Un système distribué contient 15 machines. À chaque seconde, chaque machine peut échouer avec une probabilité $p = 0{,}02$, indépendamment des autres machines.

(1) Modélisez le nombre de machines en échec simultanément à un instant donné.

(2) Quelle est la probabilité qu'aucune machine ne soit en échec à un instant donné ?

(3) Calculez la probabilité qu'au moins 2 machines soient en échec simultanément.

Solution. **(1)** Soit X le nombre de machines en échec simultanément à un instant donné. Chaque machine pouvant échouer indépendamment avec une probabilité $p = 0{,}02$, donc X suit une loi binomiale :

$$X \sim \mathscr{B}(15, 0{,}02).$$

(2) La probabilité qu'aucune machine ne soit en échec est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = 0) = (1 - p)^{15} = (0{,}98)^{15} \approx 0{,}7401.$$

(3) La probabilité qu'au moins 2 machines soient en échec s'obtient facilement par complémentarité :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geqslant 2) &= 1 - \mathbb{P}(X < 2) \\ &= 1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1)). \end{aligned}$$

On dispose déjà de $\mathbb{P}(X = 0)$, il reste à calculer $\mathbb{P}(X = 1)$:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X = 1) &= \binom{15}{1}(0{,}02)^1(0{,}98)^{14} \\ &\approx 0{,}2261. \end{aligned}$$

Et finalement

$$\mathbb{P}(X \geqslant 2) \approx 1 - (0{,}7401 + 0{,}2261) \approx 0{,}0338.$$

donc de l'ordre de 3,4%.

EXERCICE 23. Un processus effectue des tentatives de connexion à un serveur jusqu'à ce qu'il obtienne une réponse valide. Chaque tentative réussit avec une probabilité $p = 0{,}1$, indépendamment des autres.

(1) Modélisez le nombre de tentatives nécessaires pour obtenir la première réponse valide.

(2) Quelle est la probabilité que ce processus effectue plus de 5 tentatives ?

(3) Déterminez l'espérance et la variance du nombre de tentatives nécessaires.

Solution. (1) Soit X le nombre de tentatives nécessaires pour obtenir la première réponse valide. Chaque tentative étant indépendante et ayant une probabilité $p = 0{,}1$ de réussir, X suit une loi géométrique $\mathscr{G}(0{,}1)$.

(2) La probabilité que le processus effectue plus de 5 tentatives, soit $\mathbb{P}(X > 5)$, est donnée par :

$$\mathbb{P}(X > 5) = (1 - p)^5 = (0{,}9)^5 \approx 0{,}5905.$$

(3) Si $X \sim \mathscr{G}(p)$, son espérance et sa variance sont données par

$$E(X) = \frac{1}{p}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{1-p}{p^2}.$$

En remplaçant $p = 0{,}1$:

$$E(X) = \frac{1}{0{,}1} = 10, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{0{,}9}{(0{,}1)^2} = 90.$$

EXERCICE 24. Un serveur de messagerie *sendmail* reçoit en moyenne 10 requêtes par seconde. On suppose que le nombre de requêtes arrivant par seconde suit une loi de Poisson.

(1) Quelle est la probabilité que le serveur reçoive exactement 12 requêtes en une seconde donnée ?

(2) Quelle est la probabilité qu'il reçoive moins de 3 requêtes durant une demi-seconde ?

(3) Calculez l'espérance et la variance du nombre de requêtes reçues en deux secondes.

Solution. (1) Soit X le nombre de requêtes reçues en une seconde. Puisque $X \sim \mathscr{P}(\lambda = 10)$, la probabilité d'avoir exactement 12 requêtes est donnée par :

$$\mathbb{P}(X = 12) = \frac{\lambda^{12} e^{-\lambda}}{12!}.$$

En remplaçant $\lambda = 10$:

$$\mathbb{P}(X = 12) = \frac{10^{12} e^{-10}}{12!} \approx 0{,}0948.$$

(2) Soit Y le nombre de requêtes reçues en une demi-seconde. Comme la loi de Poisson est multiplicative, Y suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda' = 10 \times \frac{1}{2} = 5$. On cherche $\mathbb{P}(Y < 3)$:

$$\mathbb{P}(Y < 3) = \mathbb{P}(Y = 0) + \mathbb{P}(Y = 1) + \mathbb{P}(Y = 2).$$

Avec $\lambda' = 5$, ces probabilités sont :

$$\mathbb{P}(Y = k) = \frac{5^k e^{-5}}{k!}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Et on obtient

$$\mathbb{P}(Y = 0) \approx 0{,}0067, \quad \mathbb{P}(Y = 1) \approx 0{,}0337, \quad \mathbb{P}(Y = 2) \approx 0{,}0842.$$

on conclut en sommant :

$$\mathbb{P}(Y < 3) \approx 0{,}0067 + 0{,}0337 + 0,\, 0842 \approx 0{,}1246.$$

(3) Soit Z le nombre de requêtes reçues en deux secondes. Comme Z suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda_Z = 10 \times 2 = 20$, on a :

$$E(Z) = \lambda_Z = 20, \quad \mathrm{Var}(Z) = \lambda_Z = 20.$$

EXERCICE 25. Un algorithme de reconnaissance faciale compare une photo cible avec celles d'une base de données constituées de $N = 1000$ images. On sait que $M = 10$ images dans cette base contiennent effectivement la même personne que sur la photo cible. L'algorithme sélectionne $k = 20$ images au hasard pour les comparer.

(1) Modélisez le nombre d'images pertinentes (images contenant la même personne que sur la cible) parmi les 20 sélectionnées.

(2) Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement 2 images pertinentes parmi les 20 ?

(3) Quelle est l'espérance du nombre d'images pertinentes dans l'échantillon ?

Solution. (1) Soit X le nombre d'images pertinentes parmi les 20 sélectionnées. Le nombre d'images pertinentes suit une loi hypergéométrique, car on effectue une sélection sans remise. Le paramètre de cette loi est donné par :

$$X \sim \mathscr{H}(\overset{N}{1000}, \overset{K}{10}, \overset{n}{20}),$$

où 1000 est le nombre total d'images, 10 est le nombre d'images pertinentes, et 20 est le nombre d'images sélectionnées. La probabilité de tirer k images pertinentes parmi les 20 est donc :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{10}{k}\binom{990}{20-k}}{\binom{1000}{20}}.$$

(2) Pour $k = 2$, la probabilité qu'il y ait exactement 2 images pertinentes parmi les 20 sélectionnées est :

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{10}{2}\binom{990}{18}}{\binom{1000}{20}} \approx 0{,}0148.$$

(3) L'espérance $\mathbb{E}(X)$ d'une loi hypergéométrique $\mathscr{H}(N, K, n)$ est donnée par la formule :

$$\mathbb{E}(X) = n\left(\frac{K}{N}\right) = \frac{20 \cdot 10}{1000} = 0{,}2.$$

EXERCICE 26. Un processus de contrôle d'intégrité vérifie $N = 100$ blocs de données dans un fichier. Chaque bloc est corrompu avec une probabilité $p = 0{,}01$, indépendamment des autres.

(1) Modélisez le nombre de blocs corrompus.

(2) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun bloc corrompu ?

(3) Quelle est la probabilité qu'au moins 2 blocs soient corrompus ?

Solution. **(1)** Soit X le nombre de blocs corrompus dans le fichier. Chaque bloc peut être corrompu indépendamment avec une probabilité $p = 0{,}01$, donc X suit une loi binomiale :

$$X \sim \mathscr{B}(\overset{n}{100}, \overset{p}{0{,}01}).$$

(2) La probabilité qu'il n'y ait aucun bloc corrompu est

$$\mathbb{P}(X = 0) = (1 - 0{,}01)^{100} \approx 0{,}366.$$

(3) La probabilité qu'au moins 2 blocs soient corrompus est obtenu par complémentarité :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X \geqslant 2) &= 1 - (\mathbb{P}(X = 0) + \mathbb{P}(X = 1))\\ &\approx 1 - (100\,(0{,}01)^1(0{,}99)^{99} + 0{,}366)\\ &\approx 0{,}2643.\end{aligned}$$

EXERCICE 27. Soit A un événement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$, et soit $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A définie par :

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A,\\ 0 & \text{si } \omega \notin A.\end{cases}$$

Montrez que l'espérance de la v.a. $\mathbf{1}_A$ est égale à $\mathbb{P}(A)$.

Solution. On rappelle que l'espérance mathématique d'une variable aléatoire discrète X est une simple moyenne pondérée de cette fonction :

$$\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \sum_{\omega\in\Omega} \mathbf{1}_A(\omega)\cdot\mathbb{P}(\{\omega\}) = \sum_{\omega\in A}\mathbb{P}(\{\omega\}) = \mathbb{P}(A).$$

EXERCICE 28. Un QCM contient 20 questions. Chaque question propose 5 réponses possibles, dont une seule est correcte. Si l'étudiant coche uniquement la bonne case, il a 1 point et 0 point s'il n'en coche aucune. Dans tous les autres cas, il a un malus de m points avec $-1 \leqslant m < 0$ points. L'étudiant répond à chaque question en cochant une réponse au hasard. On note N la v.a. correspondant à sa note au QCM.

(1) Quelle est la probabilité qu'il obtienne 1 point à une question donnée ?

(2) Quelle est la probabilité qu'il obtienne un malus m à une question donnée ?

(3) Quelle doit être le malus m pour que l'espérance de la note soit nulle ?

Solution. **(1)** La probabilité qu'un étudiant obtienne 1 point à une question donnée est celle de choisir la bonne réponse, qui suit une loi uniforme puisqu'il coche l'une des 5 cases «au hasard». En notant Q la v.a. associée :

$$\mathbb{P}(Q = 1) = \frac{1}{5}.$$

(2) La probabilité qu'un étudiant obtienne le malus m pour une question donnée correspond à la probabilité de choisir une réponse incorrecte, soit :

$$\mathbb{P}(Q = m) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

(3) Le malus m appliqué à chaque mauvaise réponse étant constant, l'espérance de la v.a. Q est elle aussi constante :

$$\mathbb{E}(Q) = \left(\frac{1}{5}\right)\cdot 1 + \left(\frac{4}{5}\right)\cdot m = \frac{4m+1}{5}.$$

Pour que l'espérance de la note globale $\mathbb{E}(N)$ soit nulle, il est donc nécessaire que l'espérance $\mathbb{E}(Q)$ de la note à chaque question soit nulle :

$$\frac{4m+1}{5} = 0.$$

On obtient pour malus $m = -\frac{1}{4}$ de point.

EXERCICE 29. Un programme de détection de spam identifie correctement un spam comme tel dans 95% des cas. En revanche, il signale un e-mail régulier comme un spam dans 3% des cas. Une étude statistique a permis de déterminer que 10% des e-mails reçus sont réellement des spams.

(1) Quelle est la probabilité qu'un e-mail signalé comme spam soit effectivement un spam ?

(2) Calculez la probabilité qu'un e-mail non signalé comme spam soit réellement un spam.

Solution. **(1)** On définit les 2 évènements et leurs complémentaires suivants :

- S, $\overline{S}$: l'e-mail (est/n'est pas) réellement un spam.
- T, $\overline{T}$: l'e-mail (est/n'est pas) signalé comme spam.

On cherche à calculer la probabilité $\mathbb{P}(S \mid T)$, c'est-à-dire la probabilité qu'un e-mail signalé comme spam le soit effectivement. On utilise le théorème de Bayes :

$$\mathbb{P}(S \mid T) = \frac{\mathbb{P}(T \mid S)\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(T)}.$$

L'énoncé fournit les probabilités suivantes :

- $\mathbb{P}(S) = 0{,}10$ (probabilité qu'un e-mail soit un spam),
- $\mathbb{P}(\overline{S}) = 0{,}90$ (probabilité qu'un e-mail ne soit pas un spam),
- $\mathbb{P}(T \mid S) = 0{,}95$ (probabilité de signaler un spam à raison),
- $\mathbb{P}(T \mid \overline{S}) = 0{,}03$ (probabilité de signaler un span à tort).

La loi de probabilité totale appliquée à la partition $\{S, \overline{S}\}$ permet de calculer $\mathbb{P}(T)$:

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T \mid S)\,\mathbb{P}(S) + \mathbb{P}(T \mid \overline{S})\,\mathbb{P}(\overline{S}).$$

En remplaçant les valeurs :

$$\mathbb{P}(T) = 0{,}95 \times 0{,}10 + 0{,}03 \times 0{,}90 = 0{,}122.$$

Ainsi :

$$\mathbb{P}(S \mid T) = \frac{0{,}95 \times 0{,}10}{0{,}122} \approx 0{,}7787.$$

La probabilité qu'un e-mail signalé comme spam soit effectivement un spam est donc d'environ 78%.

(2) Nous cherchons maintenant $\mathbb{P}(S \mid \overline{T})$, c'est-à-dire la probabilité qu'un e-mail non signalé comme spam soit pourtant un spam. On utilise encore le théorème de Bayes :

$$\mathbb{P}(S \mid \overline{T}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{T} \mid S)\mathbb{P}(S)}{\mathbb{P}(\overline{T})}.$$

On sait que $\mathbb{P}(\overline{T} \mid S) = 1 - \mathbb{P}(T \mid S) = 0{,}05$, et $\mathbb{P}(\overline{T}) = 1 - \mathbb{P}(T) = 1 - 0{,}122 = 0{,}878$. Ainsi :

$$\mathbb{P}(S \mid \overline{T}) = \frac{0{,}05 \times 0{,}10}{0{,}878} \approx 0{,}0057.$$

La probabilité qu'un e-mail non signalé comme spam soit réellement un spam est donc d'environ 0,6%.

EXERCICE 30. Une usine produit $N = 1000$ pièces, dont $M = 50$ sont défectueuses. On prélève $n = 10$ pièces au hasard sans remise pour effectuer un contrôle qualité.

(1) Modélisez le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon.

(2) Quelle est la probabilité de trouver exactement 2 pièces défectueuses dans l'échantillon ?

(3) Calculez l'espérance et la variance de cette distribution.

Solution. **(1)** Soit X le nombre de pièces défectueuses dans l'échantillon. Comme le prélèvement se fait sans remise, X suit une loi hypergéométrique :

$$X \sim \mathscr{H}(1000, 50, 10),$$

où 1000 est le nombre total de pièces, 50 est le nombre de pièces défectueuses et 10 est la taille de l'échantillon. La probabilité de trouver exactement k pièces défectueuses dans l'échantillon est donc donnée par :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{50}{k}\binom{950}{10-k}}{\binom{1000}{10}}.$$

(2) Pour $k = 2$, la probabilité de trouver exactement 2 pièces défectueuses dans l'échantillon est :

$$\mathbb{P}(X = 2) = \frac{\binom{50}{2}\binom{950}{8}}{\binom{1000}{10}} \approx 0{,}0743.$$

(3) L'espérance $E(X)$ et la variance $\mathrm{Var}(X)$ de la loi hypergéométrique sont données par les formules :

$$E(X) = \frac{n \times M}{N}, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{n \times M \times (N - M) \times (N - n)}{N^2 \times (N - 1)}.$$

En remplaçant les valeurs $n = 10$, $M = 50$, et $N = 1000$:

$$E(X) = \frac{10 \times 50}{1000} = 0{,}5$$
$$\mathrm{Var}(X) = \frac{10 \times 50 \times 950 \times 990}{1000^2 \times 999} \approx 0{,}4495.$$

Probabilités continues

EXERCICE 31. ‡ Une galette des rois circulaire de rayon 1 contient une fève circulaire de rayon $0 < r < 1$ et x désigne la distance entre leurs centres. On cherche à calculer la probabilité de rencontrer la fève en coupant la galette en $p \geqslant 2$ parts égales, les p coupes formant des rayons. Pour rencontrer la fève, le couteau doit donc couper le secteur circulaire délimité par le centre O de la galette et les deux rayons tangents à la fève.

(1) Dans un repère orthonormé, représentez ce secteur pour une fève de centre $F = (x, 0)$ à une distance $x = 0{,}15$ du centre $O = (0, 0)$ de la galette et une autre à une distance $x = 0{,}6$ pour le rayon $r = 0{,}1$.

(2) Montrez que l'angle $\theta(x)$ du secteur paramétré par x est donné par

$$\theta(x) = 2 \arcsin(r/x)\,. \tag{15}$$

(3) Montrez que la distance minimale d du centre F de la fève au centre O de la galette en deça de laquelle on est certain de couper la fève est

$$d = r/\sin(\pi/p)\,. \tag{16}$$

(4) Calculez la surface $S(x)$ du secteur paramétrée par x.

(5) En considérant la v.a. $X : \Omega \to [0, 1]$ définie par $X(\omega) = x$ et en notant C l'évènement *« la fève est coupée »*, montrez que la probabilité conditionnelle de couper la fève sachant que $X = x$ est égale à

$$\mathbb{P}(C \mid X = x) = \mathbf{1}_{[0,d]}(x) + \left(\frac{p \arcsin(r/x)}{\pi}\right) \mathbf{1}_{[d,1-r]}(x). \tag{17}$$

(6) Jeter la fève « au hasard » signifie que son centre F est uniformément réparti dans le disque de rayon $1 - r$. La probabilité que F soit à une distance x du centre est proportionnelle à la circonférence du cercle de rayon x, la loi de densité de la v.a. X satisfait donc :

$$f_X(x) \propto 2\pi\, x.$$

Calculez f_X pour qu'elle soit de densité totale 1 sur le disque de rayon $1 - r$, autrement dit calculez le coefficient $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f_X(x) = 2\lambda\pi r$ et

$$\int_0^{1-r} f_X(x)\mathrm{d}x = 1. \tag{18}$$

(7) Calculez la probabilité de couper la fève $\mathbb{P}(C)$.

Solution. **(1)** Le schéma est présenté en figure 4. Vous pouvez retrouver une animation interactive dans le cours.

(2) Si on note T l'intersection d'une tangente au disque de centre F et de rayon r représentant la fève, elle est perpendiculaire au rayon $[FT]$ de la fève, le triangle OTF est donc rectangle en T. Il a pour hypothénuse x et le côté opposé à l'angle $\frac{\theta(x)}{2}$ a pour longueur $r = x \sin\left(\frac{\theta(x)}{2}\right)$, d'où

$$\boxed{\theta(x) = 2 \arcsin(r/x)} \tag{19}$$

(3) Pour ne pas couper la fève à coup sûr, le secteur rouge doit être inscrit dans celui formé par une part de galette. Il faut donc que $\theta(x) < \frac{2\pi}{p}$:

$$2 \arcsin(r/x) < \frac{2\pi}{p} \;\Leftrightarrow\; x > r/\sin(\pi/p)\,.$$

Donc

$$\boxed{d = r/\sin(\pi/p)} \tag{20}$$

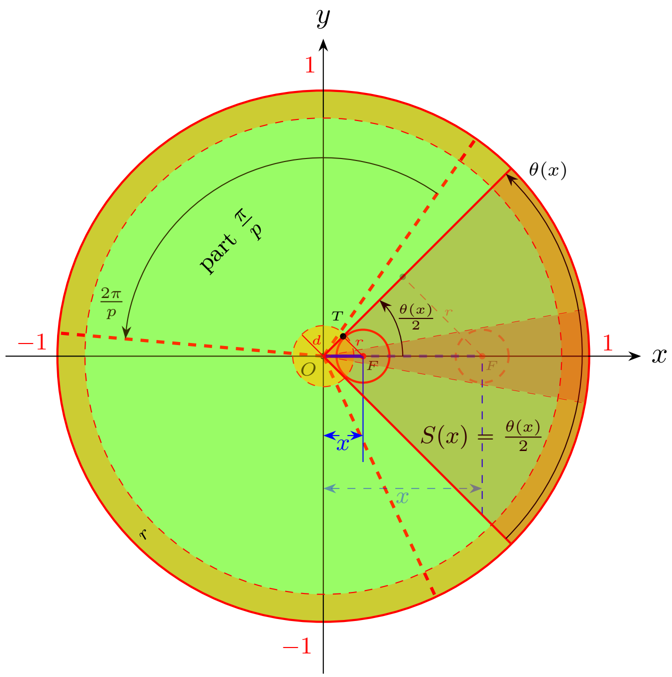

Figure 4. Secteur d'angle θ délimité par une fève de rayon r dans une galette de rayon 1 coupée en $p = 3$ parts.

(4) La surface du secteur délimité par la fève est $S(x) := \frac{1}{2}\theta(x)$ puisque la galette a pour rayon 1, autrement dit

$$\boxed{S(x) = \arcsin(r/x)} \tag{21}$$

(5) L'expérience consiste donc à jeter « au hasard » une fève de rayon r dans la galette de rayon 1 puis à couper la galette « au hasard » en p parts égales. Une fois la position x de la fève fixée, c'est l'angle que fait le couteau qui détermine si la coupe ou l'une des $p-1$ autres passe ou non dans le secteur S. Ainsi, la probabilité de l'évènement *« couper la fève sachant x »* est égale au rapport des longueurs des arcs formant le secteur et la part :

$$\frac{\theta(x)}{2\,(\pi/p)}.$$

On a donc

$$\mathbb{P}(C \mid x > d, X = x) = \frac{p \arcsin(r/x)}{\pi}. \tag{22}$$

Nous avons vu précédemment que $\mathbb{P}(C \mid X \leqslant d) = 1$, par conséquent

$$\boxed{\mathbb{P}(C \mid X = x) = \mathbf{1}_{[0,d]}(x) + \left(\frac{p \arcsin(r/x)}{\pi}\right) \mathbf{1}_{[d,1-r]}(x)} \tag{23}$$

(6) On calcule

$$\int_0^{1-r} 2\,\lambda\,\pi x \,\mathrm{d}x = 2\pi\,\lambda \int_0^{1-r} x \,\mathrm{d}x = 2\pi\,\lambda \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{1-r} = \pi\,\lambda\,(1-r)^2.$$

Pour que la fonction soit de masse totale 1, il faut donc que

$$\lambda = \frac{1}{\pi(1-r)^2} \tag{24}$$

On a finalement pour fonction de densité

$$\boxed{f_X(x) = \frac{2x}{(1-r)^2}} \tag{25}$$

(7) Pour calculer la probabilité de couper la fève, il ne reste plus qu'à intégrer $\mathbb{P}(C \mid X = x)$ par rapport à la loi f_X de densité de la v.a. X :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(C) &= \int_0^{1-r} P(C \mid X = x) f_X(x) \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{1-r} \left(\mathbf{1}_{[0,d]}(x) + \left(\frac{p \arcsin(r/x)}{\pi}\right) \mathbf{1}_{[d,1-r]}(x)\right) \frac{2x}{(1-r)^2} \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^d \frac{2x}{(1-r)^2} \,\mathrm{d}x + \int_d^{1-r} \frac{p \arcsin(r/x)}{\pi} \frac{2x}{(1-r)^2} \,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Calculons ces deux intégrales :

$$\int_0^d \frac{2x}{(1-r)^2} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{(1-r)^2} \int_0^d x \,\mathrm{d}x = \frac{d^2}{(1-r)^2}.$$

Et

$$\int_d^{1-r} \frac{p \arcsin(r/x)}{\pi} \frac{2x}{(1-r)^2} \,\mathrm{d}x = \frac{2p}{\pi(1-r)^2} \int_d^{1-r} x \arcsin(r/x) \,\mathrm{d}x$$

On peut alors conclure que

$$\boxed{\mathbb{P}(C) = \frac{1}{(1-r)^2}\left(d^2 + \frac{2p}{\pi}\int_d^{1-r} x\arcsin(r/x)\,\mathrm{d}x\right)} \tag{26}$$

Malheureusement, l'intégrale ci-dessus n'admet pas de forme explicite, il faut donc l'approximer. On peut le faire en sommant les surfaces de rectangles de hauteurs $x\arcsin(r/x)$ et de largeur $\mathrm{d}x$ à la manière de l'approximation de la loi normale par la limite de la loi binomiale que nous avons étudiée en cours :

```
def f(x):
    global r
    return x * Math.asin(r / x)

def Integrale(f,r,a,b,n):
    aire = 0
    dx = (b - a) / n
    for i in range(n):
        aire += dx * f(a + dx * (i + 0.5))
    return aire
```

En utilisant cette approximation pour calculer l'intégrale dans (26), on trouve $\mathbb{P}(C) \approx 17\%$ pour une galette de 30cm de diamètre coupée en 8 parts et dont la fève fait 1cm de diamètre.