Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique UE-12.

TD 4. Relations, applications [1]

EXERCICE 1. Considérons les trois ensembles

$$C := \{R, V, B\}, \quad V := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad G := \{(R, 2), (V, 5), (B, 7)\}.$$

(1) Comment qualifie-t-on les éléments de G ?

(2) De quel ensemble G est-il un sous-ensemble ?

(3) Dessinez le diagramme sagittal de la correspondance $c := (C, G, V)$.

(4) Est-ce une fonction, une application ?

Solution. **(1)** Les éléments de G sont des *couples*.

(2) L'ensemble G est un sous-ensemble de $C \times V$.

(3) Le diagramme sagittal est représenté en figure (1).

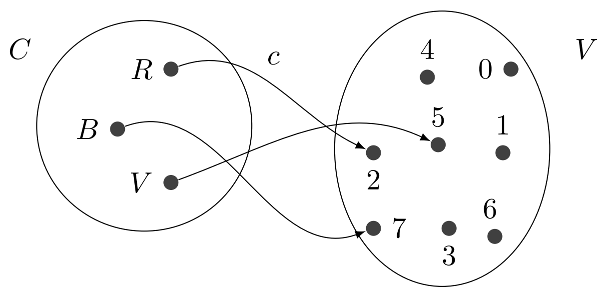

FIGURE 1. Diagramme sagittal de la correspondance c.

(4) C'est une fonction puisqu'il n'y jamais plus d'une flèche qui part d'un élément de l'ensemble de départ et c'est également une application car chaque élément de l'ensemble de départ a une image, ou dit autrement, l'ensemble de définition de cette correspondance est l'ensemble C tout entier.

1. version du 1er janvier 2025 [14:12]

EXERCICE 2. On considère la correspondance c dont le diagramme sagittal est représenté en figure (2).

(1) Écrivez l'ensemble de départ, d'arrivée et le graphe de c en extension.

(2) S'agit-il d'une fonction ? D'une application ?

(3) Dessinez le diagramme sagittal de la correspondance réciproque.

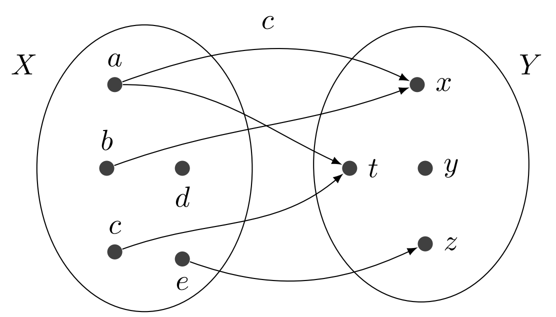

FIGURE 2. Diagramme sagittal de la correspondance c

Solution. **(1)** On a les ensembles suivants :

$$X = \{a, b, c, d, e\}, \quad Y = \{x, y, z, t\}, \quad G = \{(a, x), (a, t), (b, x), (c, t), (e, z)\}.$$

(2) Ce n'est pas une fonction puisque deux flèches partent de l'élément a, et *a fortiori* ce n'est pas une application.

(3) Le diagramme sagittal de c^{-1} est représenté en figure (3).

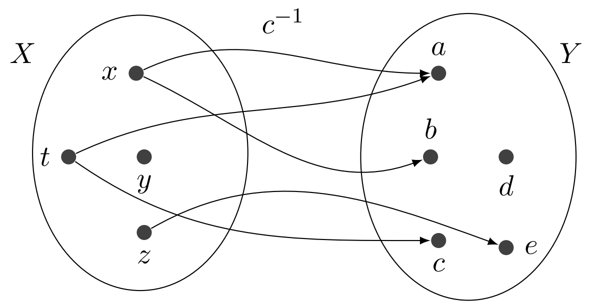

FIGURE 3. Diagramme sagittal de la correspondance c^{-1}

EXERCICE 3. **(1)** Écrivez la définition de la correspondance réciproque d'une correspondance $c = (X, G, Y)$.

(2) Écrivez une fonction *Python* `reciproque(c)` qui renvoie la correspondance réciproque de la correspondance `c`.

Solution. **(1)** Soit $c = (X, G, Y)$ une correspondance. On appelle *correspondance réciproque* de la correspondance c, la correspondance notée $c^{-1} := (Y, G^{-1}, X)$ dont le graphe G^{-1} est défini par

$$G^{-1} := \{(y, x) \mid (x, y) \in G\}.$$

(2) La correspondance est évidemment codée par un triplet `(X,G,Y)` où `X`, `G` et `Y` sont de type `set` et `G` contient des tuples de longueur 2 codant les couples du graphe :

```
def reciproque(c):
    (X,G,Y) = c
    GR = set()
    for y in Y:
        for x in X:
            if (x,y) in G:
                GR.add((y,x))
return GR
```

Algo. 1. Fonction *Python* calculant la correspondance réciproque de la correspondance en paramètre.

EXERCICE 4. † Soit X un ensemble non-vide et $f : X \times X \to \mathscr{P}(X)$ l'application définie par $f((x, y)) := \{x, y\}$.

(1) Dessinez le diagramme sagittal de cette application dans le cas particulier où $X := \{x, y, z\}$.

(2) Dans le cas général, cette application est-elle injective ? Surjective ? Justifiez votre réponse.

Solution. **(1)** Le diagramme sagittal de cette application est présenté en figure (4).

(2) Pour simplifier les écritures nous écrirons $f(x, y)$ au lieu de $f((x, y))$, mais c'est un abus de notation.

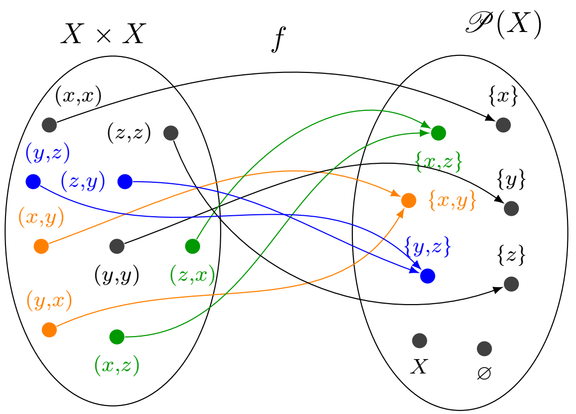

Figure 4. Diagramme sagittal de l'application f.

Il faut traiter le cas particulier où l'ensemble X est un singleton $\{x\}$. Dans ce cas $X \times X = \{(x, x)\}$ et $\mathscr{P}(X) = \{\varnothing, \{x\}\}$. On a une seule image $f(x, x) = \{x, x\} = \{x\}$ et l'application f est nécessairement injective. Elle n'est en revanche pas surjective car $\varnothing$ n'a pas d'antécédent. Les images réciproques sont $f^{-1}(\{x\}) = (x, x)$ et $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$.

Dans tous les autres cas, l'application f n'est pas injective puisque deux éléments distincts n'ont pas nécessairement des images distinctes :

$$\forall (x, y) \in X \times X \quad f(x, y) = f(y, x) = \{x, y\}.$$

Elle n'est pas non plus surjective car seuls les singletons et les paires de $\mathscr{P}(X)$ admettent un antécédent, i.e.

$$\begin{aligned} \forall x \in X \quad & f^{-1}(\{x\}) = \{(x, x)\} \\ \forall (x, y) \in X \times X \quad & f^{-1}(\{x, y\}) = \{(x, y), (y, x)\} \\ \forall A \in \mathscr{P}(X) \quad & \#A \geqslant 3 \Rightarrow f^{-1}(A) = \varnothing \end{aligned}$$

EXERCICE 5. Soit E un ensemble non-vide et A une partie de E telle que $A \neq \varnothing$ et $A \neq E$. Soit f et g deux applications de $\mathscr{P}(E)$ dans $\mathscr{P}(E)$ définies par

$$f(X) := X \cup A, \qquad g(X) = X \cap A.$$

Ces applications sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

Solution. On a $f(A) = A \cup A = A$ et $f(\varnothing) = \varnothing \cup A = A$, or $A \neq \varnothing$, nous avons exhibé deux éléments distincts de $\mathscr{P}(E)$ qui ont la même image, par conséquent l'application f n'est pas injective. La plus petite partie de E que l'on peut obtenir avec f est A puisque pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$ on a $A \subseteq f(X)$. Donc aucune partie de E strictement incluse dans A n'admet d'antécédent, en particulier $\varnothing$, f n'est donc pas surjective.

On a $g(A) = A \cap A = A$ et $g(E) = E \cap A = A$, or $A \neq E$, nous avons exhibé deux éléments distincts de $\mathscr{P}(E)$ qui ont la même imagepar conséquent l'application g n'est pas injective. La plus grande partie de E que l'on peut obtenir avec g est A puisque pour tout $X \in \mathscr{P}(E)$ on a $g(X) \subseteq A$. Donc aucune partie de E qui contient strictement A n'admet d'antécédent, en particulier la partie E, g n'est donc pas surjective.

Aucune de ces deux applications n'est par conséquent bijective.

EXERCICE 6. Soit X l'ensemble des étudiants de I23 et $\mathscr{A} := \{a, b, \ldots, z\}$ l'alphabet latin. L'application $f : X \to \mathscr{A}$ qui a tout étudiant associe la première lettre de son nom de famille est-elle injective ?

Solution. Cela dépend du nombre d'étudiants en I23 et de leurs noms de famille. Si leur nombre est inférieur ou égal au nombre de lettres de l'alphabet, il est possible que les initiales de leurs noms de famille soient distinctes. Dans le cas contraire la réponse est non, ce qui est formalisé dans cette proposition.

EXERCICE 7. Les fonctions trigonométriques sinus, cosinus et tangente de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sont-elles des applications ? Si oui sont-elles injectives, surjectives, bijectives ? Quels ensembles de départ et/ou d'arrivée considérer pour qu'elles vérifient ces propriétés ?

Solution. Afin de mieux comprendre les réponses, on représente le graphe de ces fonctions trigonométriques dans la figure 5.
Comme on considère initialement que ces trois fonctions ont pour ensemble de départ et d'arrivée $\mathbb{R}$, il faut trouver leurs ensembles de définition. Les fonctions sinus et cosinus sont définies partout mais pas la fonction tangente puisque $\tan x = \sin x / \cos x$ et que la fonction cosinus s'annule en tout point $\frac{\pi}{2} + k\pi$ pour $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit,

$$\mathscr{D}_{\cos} = \mathbb{R}, \qquad \mathscr{D}_{\sin} = \mathbb{R}, \qquad \mathscr{D}_{\tan} = \mathbb{R}\backslash\left(\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\right).$$

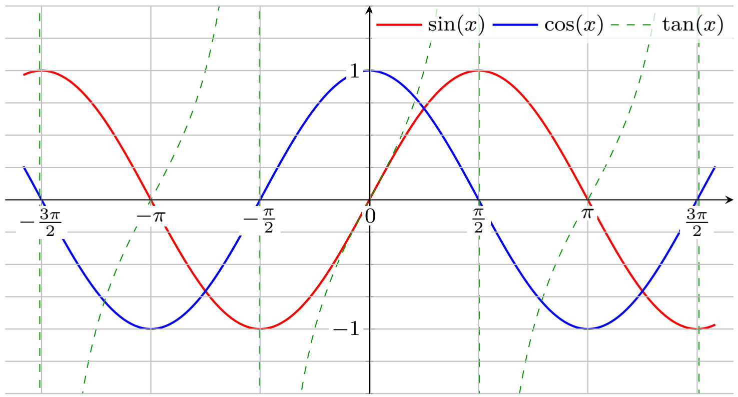

Figure 5. Graphes des fonctions trigonométriques.

En changeant les ensembles de départ, nous disposons à présent d'applications. Aucune des trois n'est injective puisqu'elles sont toutes les trois périodiques, de période 2π pour les deux premières et de période π pour la tangente, il y a donc une infinité de valeurs qui ont la même image. Même en restreignant les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle ne couvrant qu'une période, elles ne sont toujours pas injectives. En revanche la fonction tangente devient injective sur l'intervalle ouvert $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ qui couvre bien une période.

Nous savons qu'en remplaçant l'ensemble d'arrivée d'une application par l'image de cette application elle devient surjective. Les fonctions sinus et cosinus ne sont pas surjectives si leur ensemble d'arrivée est $\mathbb{R}$, mais le deviennent sur l'intervalle $[-1, 1]$. La fonction tangente est en revanche surjective dans tous les cas.

EXERCICE 8. Soit X, Y et Z trois ensembles et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications.

(1) Démontrez que $g \circ f$ peut-être injective (resp. surjective) sans que g le soit. Montrez que $g \circ f$ ne peut-être injective si f ne l'est pas.

(2) Démontrez que $g \circ f$ peut-être surjective sans que f le soit. Montrez que $g \circ f$ ne peut-être surjective si g ne l'est pas.

Solution. **(1)** On se donne trois ensembles X, Y et Z et il faut construire une application $f : X \to Y$ et une application $g : Y \to Z$ non-injective de manière à ce que l'application $g \circ f$ soit injective. Si g n'est pas injective, il faut, *a minima*, si l'on ne veut pas construire un exemple trivial, considérer deux points distincts y_1 et y_2 de Y qui ont une même image z par g dans Z et deux points x_1 et x_2 dans X pour exhiber des éléments différents avec des images différentes $g \circ f$. On part donc du diagramme sagittal de la figure 6.

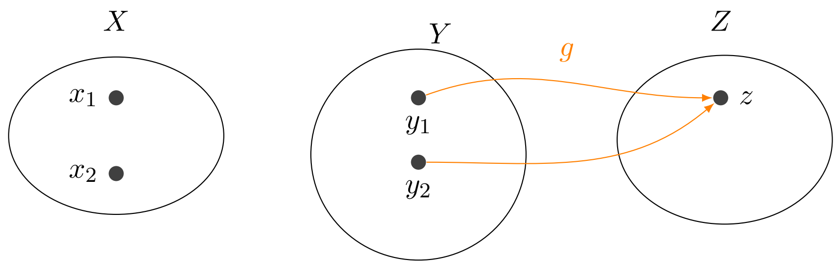

FIGURE 6. Première ébauche de l'exemple.

On peut relier x_1 à y_1, mais x_2 ne peut être connecté ni à y_1 ni à y_2 sans quoi $g \circ f$ ne serait pas injective, il faut donc nécessairement un troisième point y_3 dont l'image $g(y_3)$ ne peut pas être z, ce qui impose un deuxième point z' dans l'ensemble Z, voir figure 7.

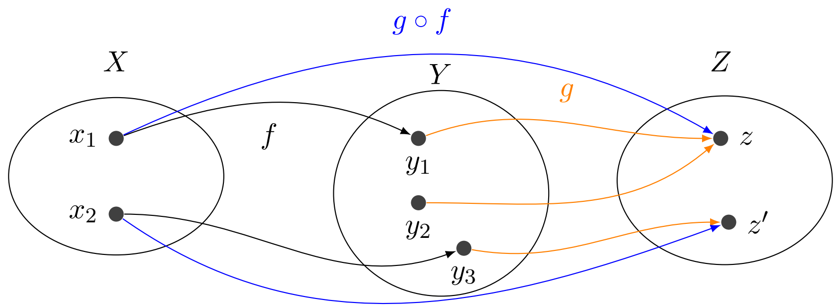

FIGURE 7. Finalisation de l'exemple.

L'application g n'est pas injective puisque $g(y_1) = g(y_2)$ alors que l'application $g \circ f$ l'est. En revanche, si f n'est pas injective, alors il existe deux éléments x et x' distincts tels que $f(x) = f(x')$ et dans ce cas $g(f(x)) = g(f(x'))$ soit $(g \circ f)(x) = (g \circ f)(x')$ ce qui prouve que $g \circ f$ n'est pas injective.

(2) L'application $g \circ f$ est bien surjective puisque z et z' ont respectivement pour antécédents x_1 et x_2 et pourtant f ne l'est pas puisque y_2 n'a pas d'antécédent. Si g n'est pas surjective alors il existe $z \in Z$ tel que $\forall y \in Y\ g(y) \neq z$, mais pour tout élément x de X, $f(x) \in Y$, donc $\forall x \in X\ g(f(x)) \neq z$ soit $(g \circ f)(x) \neq z$ et z n'a pas donc pas d'antécédent dans X.

EXERCICE 9. † Soit $\mathscr{C}$ le cercle de rayon R et de centre C du plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

(1) Définissez formellement la correspondance c de graphe $\mathscr{C}$.

(2) Dans un repère orthonormé, tracez les graphes G_c et $G_{c \circ c}$ des correspondances c et $c \circ c$ pour le centre $C := (0, 0)$ et le rayon $R := 1$.

Solution. **(1)** Si l'on note $C = (a, b)$, il s'agit de la correspondance $c = (\mathbb{R}, G, \mathbb{R})$ dont le graphe est défini par $G := \mathscr{C} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid d((x, y), (a, b)) = R\}$.

(2) Il faut remarquer que pour tout $x \in]-1, 1[$, la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par x coupe le cercle en deux points d'ordonnées y et y', donc $(x, y) \in G_c$ et $(x, y') \in G_c$. Il faut ensuite chercher les ordonnées des points d'intersection entre les droites parallèles à l'axe des ordonnées passant par y et y' soit x et $-x$. On a donc $(y, x) \in G_c$ et $(y, -x) \in G_c$ d'où $(x, x) \in G_{c \circ c}$ et $(x, -x) \in G_{c \circ c}$. On obtient pour $G_{c \circ c}$ le graphe en croix en faisant varier x dans $[-1, 1]$.

EXERCICE 10. [‡] Soit A et B deux parties non-vides d'un ensemble E non-vide. On définit $f : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ par $f(X) := (X \cap A, X \cap B)$.

(1) Démontrez que f est injective si et seulement si $A \cup B = E$.

(2) Démontrez que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

Solution. **(1)** Plutôt que montrer l'implication directe, montrons la contraposée. On suppose donc $A \cup B \neq E$ et il faut montrer que f n'est pas injective. Comme A et B sont des parties de E alors il existe un élément x de E qui n'appartient pas à la réunion $A \cup B$, donc $x \notin A$ et $x \notin B$. Dans ce cas le singleton $\{x\}$ et l'ensemble vide $\varnothing$ ont la même image $(\varnothing, \varnothing)$ par

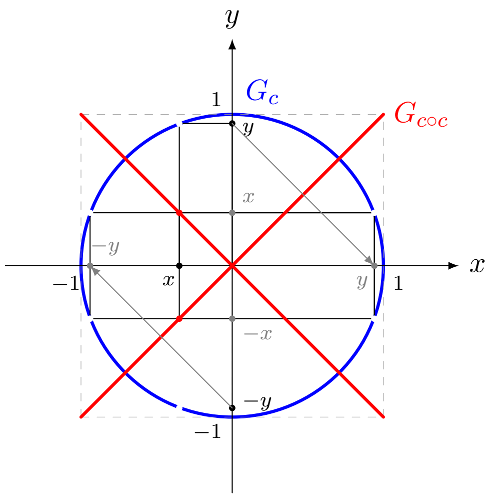

Figure 8. Graphe de c et graphe de $c \circ c$.

f prouvant que f n'est pas injective.
Réciproquement montrons que si $A \cup B = E$ alors f est injective. Soit X et Y deux parties de E telles que $f(X) = f(Y)$. On en déduit que $A \cap X = A \cap Y$ et $B \cap X = B \cap Y$ et donc que

$$\begin{aligned}(A \cap X) \cup (B \cap X) &= (A \cap Y) \cup (B \cap Y)\\ (A \cup B) \cap X &= (A \cup B) \cap Y \quad \text{distributivité}\\ E \cap X &= E \cap Y \quad \text{car } A \cup B = E\\ X &= Y\end{aligned}$$

(2) Là encore, au lieu de montrer l'implication directe, montrons la contraposée, c'est-à-dire que si $A \cap B \neq \varnothing$ alors f n'est pas surjective. Si on suppose que $A \cap B \neq \varnothing$ alors il existe $x \in A \cap B$. Montrons que le couple $(\{x\}, \varnothing)$ n'admet pas d'antécédent. Si $X \cap \{x\} = \{x\}$ alors X contient nécessairement x donc $x \in X \cap B$ et $X \cap B \neq \varnothing$.
Réciproquement, si $A \cap B = \varnothing$ montrons que tout couple (U, V) de $\mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ admet un antécédent X. Il suffit de considérer $X := U \cup V$:

$$\begin{aligned}(U \cup V) \cap A &= (U \cap A) \cup (V \cap A) & B \cap (U \cup V) &= (B \cap U) \cup (B \cap V)\\ &= U \cup \varnothing & &= \varnothing \cup V\\ &= U & &= V\end{aligned}$$

EXERCICE 11. Exprimez formellement qu'une correspondance n'est pas fonctionnelle en écrivant la négation de :

$$\forall x \in X \quad \forall (y, z) \in Y \times Y \quad \big((x, y) \in G \ \wedge \ (x, z) \in G\big) \Rightarrow y = z. \tag{1}$$

Réécrivez la définition d'une fonction en remplaçant cette proposition par sa contraposée.

Solution. La négation de la proposition (1) est :

$$\exists x \in X \quad \exists (y, z) \in Y \times Y \quad \big((x, y) \in G \ \wedge \ (x, z) \in G\big) \wedge (y \neq z).$$

La contraposée de la proposition (1) est (on applique De Morgan à la conjonction) :

$$\forall x \in X \quad \forall (y, z) \in Y \times Y \quad y \neq z \Rightarrow \big((x, y) \notin G \ \vee \ (x, z) \notin G\big).$$

EXERCICE 12. Soit f et g les deux applications définies par les diagrammes sagittaux de la figure 9.

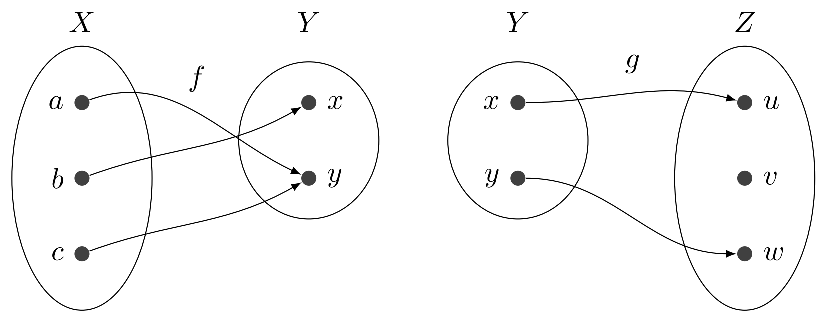

Figure 9. Diagrammes sagittaux des applications f et g.

(1) Écrivez les graphes G_f et G_g des deux applications f et g respectivement en extension.

(2) Ces applications sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

(3) Dessinez le diagramme sagittal de la composition $g \circ f$ de ces deux applications et écrivez son graphe $G_{g \circ f}$ en extension.

(4) L'application $g \circ f$ est-elle injective, surjective, bijective ?

(5) La correspondance réciproque de $g \circ f$ est-elle une fonction ? Une application ?

Solution. **(1)** On a $G_f = \{(a, y), (b, x), (c, y)\}$ et $G_g = \{(x, u), (y, w)\}$.

(2) L'application f n'est pas injective car $f(a) = f(c)$, elle est en revanche surjective puisque x et y ont tout deux au moins un antécédent. L'application g est injective car les éléments de Y ont des images distinctes dans Z mais n'est pas surjective car v n'admet pas d'antécédent. Ni l'une n'est l'autre ne peut donc être bijective.

(3) Le diagramme sagittal de $g \circ f$ est en figure (10).

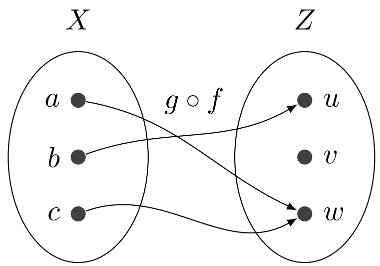

Figure 10. Diagramme sagittal de l'application $g \circ f$.

On a $G_{g \circ f} = \{(a, w), (b, u), (c, w)\}$.

(4) L'application ne peut-être surjective ni injective (cf. exercice 8).

(5) La correspondance réciproque ne peut être une fonction puisque $g \circ f$ n'est pas injective.

EXERCICE 13. † Soit $\mathscr{B} := \{0, 1\}$ muni de sa structure d'algèbre de Boole. Soit X un ensemble quelconque et A et B deux parties de X. On définit la *fonction indicatrice* de A notée $1_A : X \to \mathscr{B}$ par

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) Que peut-on dire des ensembles A et B si $1_A = 1_B$?

(2) Exprimez la fonction indicatrice du complémentaire de A dans X, de $A \cap B$, de $A \cup B$ et de $A \Delta B$ à l'aide des fonctions indicatrices de A et B.

(3) Soit $f : X \to Y$ et C une partie de Y. De quel ensemble la fonction $1_C \circ f$ est-elle la fonction indicatrice ?

(4) Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ et $(X_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ une partition de X. Montrez que

$$\sum_{i=1}^{n} 1_{X_i} = 1_X.$$

Solution. **(1)** Si $1_A = 1_B$ alors $A = B$. En effet, supposons que $1_A = 1_B$ et montrons que $(A \subseteq N) \wedge (B \subseteq A)$ (cf. axiome d'extension). Soit $x \in A$, alors $1_A(x) = 1$ et par transitivité de l'égalité $1_B(x) = 1$ puisque les deux fonctions 1_A et 1_B sont supposées égales, ce qui prouve que $x \in B$. Le raisonnement est identique pour l'autre inclusion.

(2) Ces indicatrices vérifient les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} 1_{X \backslash A}(x) &= \overline{1_A(x)} \\ 1_{A \cap B}(x) &= 1_A(x).1_B(x) \\ 1_{A \cup B}(x) &= 1_A(x) + 1_B(y) \\ 1_{A \Delta B}(x) &= 1_A(x) \oplus 1_B(y) \end{aligned}$$

(3) Il s'agit de l'ensemble $f^{-1}(C)$. En effet, $1_C \circ f(x) = 1$ si $f(x) \in C$ qui équivaut à $x \in f^{-1}(C)$.

(4) On considère le prédicat $P(k)$ défini par :

$$1_{X_1 \sqcup \cdots \sqcup X_k} = \sum_{i=1}^{k} 1_{X_i}.$$

La proposition $P(2)$ est vraie d'après la question (2). Montrons que pour tout entier $k \in [\![2, n-1]\!]$, $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. On a

$$\begin{aligned}
1_{X_1 \sqcup X_2 \sqcup \cdots \sqcup X_{k+1}} &= 1_{X_1 \sqcup X_2 \sqcup \cdots \sqcup X_{k-1} \sqcup (X_k \sqcup X_{k+1})} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} 1_{X_i} + 1_{X_k \sqcup X_{k+1}} \qquad \text{hypothèse de récurrence} \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} 1_{X_i} + 1_{X_k} + 1_{X_{k+1}} \qquad \text{d'après (2)} \\
&= \sum_{i=1}^{k+1} 1_{X_i}
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve.

EXERCICE 14. Écrivez l'ensemble de définition $\mathscr{D}(f)$ d'une fonction $f : X \to Y$ de graphe G_f en compréhension. Comment qualifie-t-on l'écriture

$$\mathscr{D}_f = \{\textit{glace, alcool, cinéma, smartphone, livre}\}. \tag{2}$$

de l'ensemble $\mathscr{D}_f$?

Solution. On a $\mathscr{D}_f := \{x \in X \mid \exists y \in Y \quad (x, y) \in G_f\}$ et l'écriture (2) est une écriture en extension.

EXERCICE 15. La fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^2$ est-elle une application ? Si oui, est-elle injective, surjective ? Sa correspondance réciproque est-elle une fonction ?

Solution. La fonction f étant définie en tout réel x, il s'agit d'une application. Elle n'est pas injective puisque deux réels opposés x et $-x$ ont la même image $x^2 = (-x)^2$. Elle n'est pas non plus surjective puisqu'aucun réel négatif n'est un carré. La correspondance réciproque f^{-1} n'est pas une fonction puisque f n'est pas injective. Attention, l'application racine carrée $\sqrt{\ } : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ n'est *pas* l'application réciproque de f mais de l'application $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ qui coïncide avec f sur $\mathbb{R}_+$.

EXERCICE 16. † Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux bijections.

(1) Démontrez que

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

(2) Quelle est la nature de la preuve qui permet de généraliser ce résultat à la composition de n applications $f_1, f_2, \ldots, f_n$ où pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $f_i : X_i \to Y_i$ avec $Y_i = X_{i+1}$:

$$(f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ \cdots \circ f_{n-1}^{-1} \circ f_n^{-1}.$$

Solution. (1) Il faut montrer que

$$\forall z \in Z \quad (g \circ f)^{-1}(z) = f^{-1} \circ g^{-1}(z). \tag{3}$$

Soit z un élément quelconque de Z. Comme g est une bijection, il existe un unique $y \in Y$ tel que $g(y) = z$ et donc $g^{-1}(z) = y$. Il existe également un unique $x \in X$ tel que $f(x) = y$ et donc $f^{-1}(y) = x$. Puisque $g(y) = z$ et $f(x) = y$, on a $g(f(x)) = z$ soit $g \circ f(x) = z$ ou encore $(g \circ f)^{-1}(z) = x$ car la composée de deux bijections est une bijection. D'autre part comme $g^{-1}(z) = y$ et $f^{-1}(y) = x$ on a $f^{-1}(g^{-1}(z)) = x$ soit $f^{-1} \circ g^{-1}(z) = x$ ce qui prouve (3).

(2) Il s'agit d'une preuve par récurrence finie.

EXERCICE 17. Montrez qu'une application $f : X \to Y$ est une bijection si et seulement s'il existe une application $g : Y \to X$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_X \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_Y. \tag{4}$$

Montrez dans ce cas que g est l'application réciproque f^{-1} de f.

Solution. Supposons que f soit une bijection. Pour définir une application g de Y dans X, il faut la définir en tout $y \in Y$. Soit $y \in Y$, comme f est bijective, il existe un unique $x \in X$ tel que $f(x) = y$, on fixe donc $g(y) := x$. On a alors $f(g(y)) = y$ soit $f \circ g(y) = y$ et nous venons de montrer que $\forall y \in Y,\ f \circ g(y) = y$, autrement dit que $f \circ g = \mathrm{Id}_Y$. Soit $x \in X$ et $y := f(x)$ son image. Comme f est bijective, x est l'unique antécédent de y et par conséquent $g(y) = x$ d'où $g(f(x)) = x$ soit $g \circ f(x) = x$. Nous venons de montrer que $\forall x \in X,\ g \circ f(x) = x$, autrement dit que $g \circ f = \mathrm{Id}_X$.

Réciproquement, supposons que (4) soit vrai, montrons que f est une bijection. Soit $y \in Y$, montrons qu'il existe un unique $x \in X$ tel que $f(x) = y$. On a $f \circ g(y) = y$ soit $f(g(y)) = y$ et on note $x := g(y)$ qui est donc un antécédent de y. Supposons que y admette un autre antécédent x', i.e. $f(x') = y$, alors $g(f(x')) = g(y)$ soit $g \circ f(x') = x$ et finalement $x' = x$ puisque $g \circ f = \mathrm{Id}_X$.

Il faut montrer que $\forall y \in Y\ g(y) = f^{-1}(y)$. Par définition, $x := f^{-1}(y)$ est l'unique antécédent de y par f et $f(x) = y$ et d'après (4), $g(f(x)) = x = g(y) = f^{-1}(y)$.

EXERCICE 18. Écrivez la négation logique de chacune des propriétés remarquables du graphe d'une relation binaire sur un ensemble (réflexif, symétrique, transitif, etc.).

Solution. On note G un graphe défini sur un ensemble X. Les propriétés remarquables de G et leurs négations sont les suivantes :

$$\begin{aligned}
\text{réflexivité} &: \forall x \in X \quad (x,x) \in G.\\
\text{non-réflexivité} &: \exists x \in X \quad (x,x) \notin G.\\
\text{antiréflexivité} &: \forall x \in X \quad (x,x) \notin G.\\
\text{non-antiréflexivité} &: \exists x \in X \quad (x,x) \in G.\\
\text{symétrie} &: \forall (x,y) \in X^2 \quad (x,y) \in G \Rightarrow (y,x) \in G.\\
\text{non-symétrie} &: \exists (x,y) \in X^2 \quad (x,y) \in G \wedge (y,x) \notin G.\\
\text{antisymétrie} &: \forall (x,y) \in X^2 \quad (x,y) \in G \wedge (y,x) \in G \Rightarrow (x = y).\\
\text{non-antisymétrie} &: \exists (x,y) \in X^2 \quad (x,y) \in G \wedge (y,x) \in G \wedge (x \neq y).\\
\text{asymétrie} &: \forall (x,y) \in X^2 \quad (x,y) \in G \Rightarrow (y,x) \notin G.\\
\text{non-asymétrie} &: \exists (x,y) \in X^2 \quad (x,y) \in G \wedge (y,x) \in G.\\
\text{transitivité} &: \forall (x,y,z) \in X^3 \quad (x,y) \in G \wedge (y,z) \in G \Rightarrow (x,z) \in G.\\
\text{non-transitivité} &: \exists (x,y,z) \in X^3 \quad (x,y) \in G \wedge (y,z) \in G \wedge (x,z) \notin G.\\
\text{antitransitivité} &: \forall (x,y,z) \in X^3 \quad (x,y) \in G \wedge (y,z) \in G \Rightarrow (x,z) \notin G.\\
\text{non-antitransitivité} &: \exists (x,y,z) \in X^3 \quad (x,y) \in G \wedge (y,z) \in G \wedge (x,z) \in G.
\end{aligned}$$

Remarques : (1) L'antitransitivité entraîne l'antiréflexivité (prendre $x = y = z$). (2) Compte tenu des définitions de l'antiréflexivité et de l'antitransitivité, il eut été préférable d'appeler asymétrie l'antisymétrie et réciproquement par souci de cohérence.

EXERCICE 19. On définit une relation binaire $\mathscr{R}$ sur l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par $f \mathscr{R} g$ si et seulement les deux applications sont égales à partir d'un certain rang.

(1) Formalisez la définition de cette relation binaire.

(2) Démontrez qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.

Solution. (1) Quand on parle d'une « *propriété satisfaite à partir d'un certain rang* », il s'agit d'un prédicat $P(n)$ à une variable entière tel qu'il existe un entier R, le rang, à partir duquel $P(n)$ est vraie, i.e.

$$\exists R \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant R \Rightarrow P(n). \tag{5}$$

Ainsi, pour démontrer qu'une propriété est vraie à partir d'un certain rang, il faut trouver ce rang, puis vérifier que $P(n)$ est vrai pour tout entier $n \geqslant R$.

Dans cet exercice, $f \mathscr{R} g$ si et seulement si

$$\exists R \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant R \Rightarrow f(n) = g(n). \tag{6}$$

(2) L'application f étant égale à elle-même pour toutes les valeurs de n, l'égalité est vérifiée dès le rang $R = 0$, autrement dit $f \mathscr{R} f$ et la relation est donc réflexive. Elle est tout aussi évidemment symétrique, puisque si f est égale à g à partir d'un certain rang, g est égale à f à partir du même rang. Seule la transitivité demande un peu d'attention, l'exemple suivant permettra d'illustrer la preuve :

n	0	1	<u>2</u>	3	**<u>4</u>**	5	6	7	8	$\cdots$
$f(n)$	5	1	8	9	8	5	0	7	2	$\cdots$
$g(n)$	2	1	3	4	8	5	0	7	2	$\cdots$
$h(n)$	8	0	3	4	8	5	0	7	2	$\cdots$

L'égalité entre les applications f et g commence à partir du rang $R_1 = 4$, alors que l'égalité entre les applications g et h commence à partir du rang $R_2 = 2$. L'égalité entre f et h est donc acquise à partir du maximum de ces deux rangs.

Supposons que $f \mathscr{R} g$ et $g \mathscr{R} h$, on a les deux assertions suivantes :

$$\begin{aligned}
&\exists\ R_1 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant R_1 \Rightarrow f(n) = g(n)\\
&\exists\ R_2 \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad n \geqslant R_2 \Rightarrow g(n) = h(n).
\end{aligned}$$

On définit $R := \max\{R_1, R_2\}$. Alors pour tout $n \geqslant R$ on a à la fois $f(n) = g(n)$ et $g(n) = h(n)$ et conséquemment $f(n) = h(n)$ par transitivité de l'égalité, soit $f \mathscr{R} h$.

EXERCICE 20. Démontrez que si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence sur un ensemble X et $x \in X$, alors

$$\forall y \in \overline{x} \quad \overline{y} = \overline{x}. \tag{7}$$

Solution. Soit $y \in \overline{x}$, montrons que $\overline{y} = \overline{x}$, autrement dit d'après l'axiome d'extension que $\overline{y} \subseteq \overline{x}$ et $\overline{x} \subseteq \overline{y}$. Soit $a \in \overline{y}$ donc $a \mathscr{R} y$ mais $y \in \overline{x}$ donc $y \mathscr{R} x$ et par transitivité : $a \mathscr{R} x$ donc $a \in \overline{x}$. Soit $a \in \overline{x}$ donc $a \mathscr{R} x$ mais $y \in \overline{x}$ donc $y \mathscr{R} x$ et $x \mathscr{R} y$ par symétrie, et finalement par transitivité : $a \mathscr{R} y$ sonc $a \in \overline{y}$.

EXERCICE 21. Démontrez que si $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence définie sur un ensemble X alors l'ensemble quotient $X/\mathscr{R}$ est une partition de l'ensemble X. Réciproquement démontrez que si $P \subseteq \mathscr{P}(X)$ est une partition de X alors il existe une unique relation d'équivalence $\mathscr{R}$ sur X telle que $X/\mathscr{R} = P$ et qu'elle est définie par

$$x \mathscr{R} y \Leftrightarrow \exists A \in P \quad (x \in A) \text{ et } (y \in A). \tag{8}$$

Solution. On considère une classe d'équivalence $\overline{x}$ de $X/\mathscr{R}$. Par définition $x \in \overline{x}$, donc $x \in \overline{x} \neq \varnothing$. Soit $\overline{y}$ une autre classe d'équivalence, i.e. $\overline{x} \neq \overline{y}$, montrons que $\overline{x} \cap \overline{y} = \varnothing$. Par l'absurde, s'il existe $a \in \overline{x} \cap \overline{y}$, alors d'après l'exercice (20) on a $\overline{a} = \overline{x}$ et $\overline{a} = \overline{y}$ et par transitivité de l'égalité $\overline{x} = \overline{y}$ ce qui est contradictoire. Pour finir, les singletons formés par les éléments de X forment évidemment une partition de X,

$$\begin{aligned} X &= \bigsqcup_{x \in X} \{x\} \\ &\subseteq \bigcup_{x \in X} \overline{x} \quad \text{car } \{x\} \subseteq \overline{x} \end{aligned}$$

Réciproquement, considérons une partition $(X_i)_{i \in I}$ de X. On définit une relation $\mathscr{R}$ sur X par

$$x \mathscr{R} y \Leftrightarrow x \in \overline{y}.$$

Montrons qu'il s'agit d'une relation d'équivalence. Soit $x \in X$, la relation $\mathscr{R}$ est réflexive puisque $x \in \overline{x}$. Soit x et y deux éléments de X tels que $x \mathscr{R} y$, donc $\overline{x} = \overline{y}$ et ainsi $y \in \overline{x}$ soit $y \mathscr{R} x$. La relation est donc symétrique. Pour finir, soit x, y et z trois éléments de X tels que $x \mathscr{R} y$ et $y \mathscr{R} z$, alors $x \in \overline{y}$ et $y \in \overline{z}$ et on en déduit que $\overline{x} = \overline{y} = \overline{z}$ ce qui prouve que $x \in \overline{z}$.

EXERCICE 22. Parmi les propriétés remarquables d'une relation binaire, lesquelles sont satisfaites par la relation de parallélisme $\parallel$ des droites du plan réel ? Par la relation d'orthogonalité $\perp$ des droites du plan réel ?

Solution. La relation de parallélisme est réflexive, une droite du plan réel est toujours parallèle à elle même. Elle est également symétrique, si une droite D est parallèle à une droite D' alors D' est parallèle à D. Elle est également transitive puisque si D est parallèle à D', elle même parallèle à D'', alors D est parallèle à D''.

La relation d'orthogonalité est anti-réflexive, une droite n'est jamais orthogonale à elle-même. Elle est en revanche symétrique, si $D \perp D'$ on a évidemment $D' \perp D$. Elle n'est pas transitive puisque si $D \perp D'$ et $D' \perp D''$ on en déduit que $D \parallel D''$ et donc que $D \not\perp D''$, elle est alors antitransitive.

EXERCICE 23. Montrez que la relation binaire définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mathscr{R} y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$ est une relation d'équivalence.

Solution. On sait que (cf. Pythagore sur le cercle unité)

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \tag{9}$$

(1) D'après l'identité (9) la relation $\mathscr{R}$ est réflexive.

(2) Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\cos^2 x + \sin^2 y = 1$. D'après l'indentité (9), on a $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ et $\sin^2 y = 1 - \cos^2 y$ et par conséquent

$$\begin{aligned} (1 - \sin^2 x) + (1 - \cos^2 y) &= 1 \\ 2 - (\sin^2 x + \cos^2 y) &= 1 \end{aligned}$$

Et finalement $\sin^2 x + \cos^2 y = 1$ ce qui prouve que la relation est symétrique.

(3) Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $\cos^2 x + \sin^2 y = 1$ et $\cos^2 y + \sin^2 z = 1$. On additionne terme-à-terme :

$$\begin{aligned}(\cos^2 x + \sin^2 y) + (\cos^2 y + \sin^2 z) &= 2 \\ \cos^2 x + (\sin^2 y + \cos^2 y) + \sin^2 z &= 2 \\ \cos^2 x + 1 + \sin^2 z &= 2 \quad \text{d'après (9)} \\ \cos^2 x + \sin^2 z &= 1\end{aligned}$$

ce qui prouve que la relation est transitive. C'est donc une relation d'équivalence.

EXERCICE 24. Démontrez que la relation binaire d'inclusion $\subseteq$ définie sur l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des parties d'un ensemble X est une relation d'ordre. Est-ce un ordre total ou partiel ?

Solution. La relation $\subseteq$ est réflexive par définition de l'inclusion. Soit A et B deux parties de X, l'axiome d'extension permet d'affirmer que cette relation est antisymétrique :

$$(A \subseteq B) \ \wedge \ (B \subseteq A) \ \Leftrightarrow \ A = B.$$

Soit A, B et C trois parties de X. Si $A \subseteq B$, alors $\forall x \in A$, $x \in B$ et si $B \subseteq C$, alors $x \in C$ donc $A \subseteq C$. La relation est donc transitive.
Si l'ensemble X est vide ou réduit à un singleton, c'est une relation d'ordre total, dans tous les autres cas, c'est une relation d'ordre partiel car il existe toujours deux éléments a et b distincts dans $\mathscr{P}(X)$ et dans ce cas $\{a\} \nsubseteq \{b\}$ et $\{b\} \nsubseteq \{a\}$.

EXERCICE 25. † On définit la relation de divisibilité $|$ sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par

$$a \mid b \Leftrightarrow \exists c \in \mathbb{N} \ \ ac = b.$$

(1) Démontrez qu'il s'agit d'une relation d'ordre partiel.

(2) Vérifiez que 0 est le plus grand élément pour cette relation.

(3) Existe-t-il un plus petit élément ?

On restreint à présent cette relation à l'ensemble $\mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$.

(4) Existe-t-il un plus petit élément ? Un plus grand élément ?

(5) Quels sont alors les éléments minimaux, maximaux s'il en existe ?

(6) Tracez le diagramme de Hasse de la relation de divisibilité restreinte à l'ensemble $[\![1, 15]\!]$.

Solution. (1) La relation de divisibilité est réflexive puisque pour tout $a \in \mathbb{N}$, $a \mid a$ en prenant $c = 1$. Soit a et b deux entiers naturels tels que $a \mid b$ et $b \mid a$. Il existe donc deux entiers c et c' tels que

$$a\,c = b \quad \text{et} \quad b\,c' = a.$$

En remplaçant a par $b\,c'$ dans la première égalité, on en déduit que $b\,c'\,c = b$ ce qui entraîne que $c\,c' = 1$ puis $c = c' = 1$ car nous sommes dans $\mathbb{N}$ et finalement $a = b$ prouvant que la relation est antisymétrique. Soit a, b et c trois entiers naturels tels que $a \mid b$ et $b \mid c$. On dispose donc de deux entiers naturels d et d' tels que

$$a\,d = b \quad \text{et} \quad b\,d' = c.$$

et en remplaçant b par $a\,d$ dans la deuxième égalité on obtient $a\,d\,d' = c$ ce qui prouve que $a \mid c$. La relation est donc transitive. C'est une relation d'ordre partiel car $2 \nmid 3$ et $3 \nmid 2$, entre autres.

(1) En posant $c := 0$, on a

$$\forall a \in \mathbb{N} \quad a\,c = 0$$

ce qui prouve que 0 est le plus grand élément pour $|$ ("tout le monde divise 0").

(2) Pour tout entier $b \in \mathbb{N}$, on a trivialement $1 \mid b$, donc 1 est le plus petit élément pour la relation $|$.

(3) L'ensemble $\mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ n'admet pas de plus petit élément ni de plus grand élément pour la divisibilité.

(4) Il n'admet pas d'éléments maximaux mais admet des éléments minimaux, les nombres premiers.

(5) Un diagramme de Hasse possible est représenté en figure (11).

EXERCICE 26. On considère un ensemble fini quelconque Σ qu'on appelle *alphabet* et l'ensemble des mots Σ^* définis sur cet alphabet, c'est-à-dire l'ensemble des séquences d'éléments de Σ. Par exemple si Σ est l'alphabet latin, $(i, n, f, o, r, m, a, t, i, q, u, e)$ est un mot de Σ^* que l'on écrit plus simplement *informatique*. La *longueur* d'un mot u est notée $|u|$. La loi de

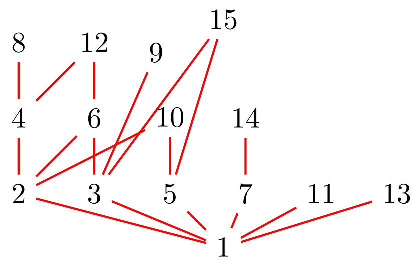

Figure 11. Diagramme de Hasse partiel pour la divisibilité.

composition interne . dite de *concaténation*, agit sur deux mots $u_1u_2\dots u_n$ et $v_1v_2\dots v_m$ de Σ^* de la manière suivante :

$$u.v := (u_1, u_2, \dots, u_n, v_1, v_2, \dots, v_m).$$

Le *mot vide* ε est l'élément neutre pour cette loi qui est associative mais pas commutative. On définit la relation binaire *préfixe* $\sqsubseteq$ sur Σ^* par $u \sqsubseteq v$ si et seulement si

$$(|u| \leqslant |v|) \wedge (\forall i \in [\![1, |u|]\!] \quad v_i = u_i). \tag{10}$$

et on dit alors que u est un *préfixe* de v. Par exemple, *lac* est un préfixe de *lacet*.

(1) Montrez que la relation $\sqsubseteq$ est une relation d'ordre.

(2) La relation est-elle totale ou partielle ?

Solution. (1) À la lumière de (10), la relation relation $\sqsubseteq$ est évidemment réflexive. Supposons que $u \sqsubseteq v$ et $v \sqsubseteq u$, on a donc d'une part $|u| \leqslant |v|$ et $|v| \leqslant |u|$, les deux mots ont donc la même longueur et d'autre part leurs projections respectives sont toutes égales, autrement dit $u = v$ ce qui prouve l'antisymétrie. Supposons que $|u| \sqsubseteq |v|$ et $|v| \sqsubseteq |w|$. Alors par transitivité de l'inégalité on a $|u| \leqslant |w|$ et par transitivité de l'égalité on a $\forall i \in [\![1, |u|]\!] \quad w_i = u_i$ prouvant la transitivité.

(2) C'est une relation d'ordre partiel, les deux mots *arbre* et *barque* ne sont pas comparables, aucun n'est le préfixe de l'autre.