Algorithmique III. L2 Informatique I41.

TD 6. Tris empiriques et complexité des tris comparatifs [1]

EXERCICE 1. Si L est une liste de n éléments d'un ensemble $(X, \leqslant)$ totalement ordonné, combien y-a-il de comparaisons du type $L[i] \leqslant L[j]$ possibles avec $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$? Même question pour les indices $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tels que $i<j$?

EXERCICE 2. Soit n un entier naturel non-nul et la liste $L := [1,2,\dots,n]$ définie par $\forall i \in [\![1,n]\!]\ L[i] := i$, donc la permutation identité. Pour toute valeur de i allant de 1 à $n-1$, on tire un nombre j au hasard dans l'intervalle $[\![i,n]\!]$ et on échange les termes d'indices i et j, autrement dit $L \leftarrow (L[i], L[j]) \circ L$.

Démontrez que la liste obtenue après ces $n-1$ transpositions est une permutation aléatoire de $\mathfrak{S}_n$, au sens où la distribution de probabilités sur les permutations est la distribution uniforme : chaque évènement élémentaire a une probabilité de $1/(n!)$.

Indication : remarquez que l'entier à la position i a été tiré au hasard parmi les $n-i+1$ valeurs à partir de sa position (lui compris).

EXERCICE 3. (1) Écrivez un algorithme $\mathsf{Propager}(L,g,d)$ qui balaie la liste L de l'indice g à l'indice $d-1$, compare les termes adjacents $L[k]$ et $L[k+1]$ en les échangeant si $L[k] > L[k+1]$. L'algorithme devra renvoyer un booléen indiquant s'il y a eu ou non des échanges.

(2) Démontrez que votre algorithme s'arrête.

(3) À l'aide d'un invariant de boucle adéquat, démontrez qu'après cette propagation, on a :

$$L[d] = \max\{L[i] \mid i \in [\![g,d]\!]\}. \tag{1}$$

(4) Démontrez qu'après l'exécution de l'algorithme du tri par propagation (le tri à bulles), la liste L est triée.

1. Version du 5 juillet 2022, 12 : 18

EXERCICE 4. Le *tri cocktail* est une variation autour du tri par propagation. Au lieu de balayer la liste uniquement dans le sens gauche-droite, on alterne un balayage gauche-droite avec un balayage droite-gauche.

(1) Modifiez l'algorithme $\mathsf{Propager}(L,a,b)$ pour que la propagation se fasse de gauche à droite si $a<b$ et de droite à gauche sinon. On supposera que $a \neq b$.

(2) Écrivez l'algorithme du tri cocktail.

(3) Soit $L = [2,3,4,5,1]$. Comparez le nombre d'échanges et le nombre de tests effectués par le tri à bulles et le tri cocktail pour trier L ?

EXERCICE 5. Le *tri à peigne* est une amélioration du tri par propagation. On dispose d'une liste L de n termes. Au lieu de comparer successivement les termes $L[i]$ et $L[i+1]$, on compare les termes $L[i]$ et $L[i+k]$ où k est initialisé à $\lfloor n/\rho \rfloor$ avec $1<\rho<2$ et mis à jour après chaque passe sur la liste par $k \leftarrow \max\{1, \lfloor k/\rho \rfloor\}$. Une fois que le pas k a atteint la valeur 1, la condition de boucle se limite à savoir s'il y a eu un échange lors du précédent passage. Écrivez cet algorithme avec deux paramètres en entrée, la liste à trier et le facteur de réduction.

EXERCICE 6. (1) Soit $(X, \preceq)$ un ensemble totalement ordonné et fini de cardinal n. Montrez qu'il existe une unique bijection croissante entre l'ensemble X et l'ensemble $[\![1,n]\!]$ muni de l'ordre naturel $\leqslant$.

(2) Démontrez qu'une liste L d'éléments d'un ensemble $(X, \preceq)$ totalement ordonné est triée si et seulement si L est une application croissante.

EXERCICE 7. Construisez les arbres de décision des trois tris empiriques, i.e., le tri par sélection dans sa version où le min est sélectionné à chaque étape, le tri par propagation (optimisé, cf. algorithme $\mathsf{Propager}$ plus haut pour le test) et le tri par insertion (on insère en partant de la fin) pour les listes qui décrivent le groupe $\mathfrak{S}_3$.