Algorithmique III. L2 Informatique I41.

TD 1. Généralités [1]

EXERCICE 1. Calculer la somme des valeurs obtenues en lançant 10 fois de suite un dé à 6 faces constitue-t-il un algorithme ? Justifiez votre réponse.

EXERCICE 2. Un *organigramme* est une description schématique d'un algorithme. Les instructions sont rangées dans des boites reliées par des flèches indiquant leur chronologie.

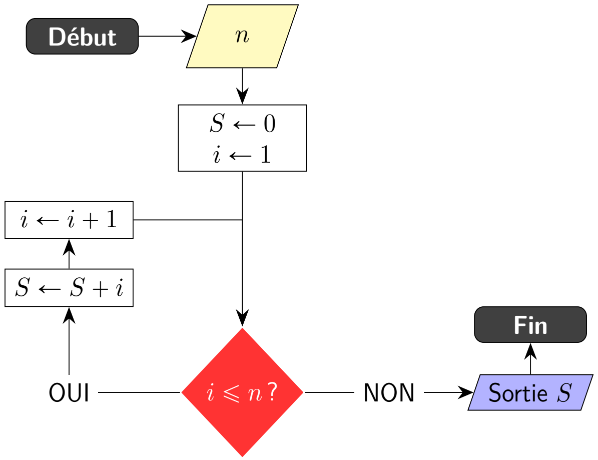

FIGURE 1. Organigramme du programme calculant la somme des n premiers entiers.

Ces boites ont des formes différentes selon la nature des instructions qu'elles contiennent, ovales pour le début et la fin, trapézoïdales pour les entrées/sorties (sur fond jaune pour les entrées et bleu pour les sorties ici), losanges pour les tests, et rectangulaires pour les autres instructions.

L'algorithme calculant la somme des n premiers entiers naturels non-nuls est présenté sous forme d'organigramme en figure 1. Écrivez sous forme d'*organigramme* l'algorithme de résolution d'une équation polynomiale $aX^2 + bX + c = 0$ dans le corps des réels $\mathbb{R}$ (les coefficients du polynôme ne sont pas nécessairement non-nuls).

EXERCICE 3. Proposez un schéma d'encodage pour décrire les positions des pièces sur un échiquier (voir la figure 2). On rappelle qu'il y a 6 types de pièces : pions, tours, fous, cavaliers, rois et reines.

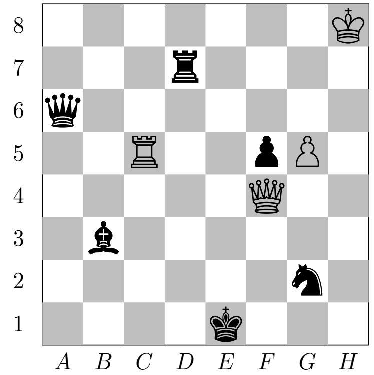

FIGURE 2. Une position sur un échiquier.

EXERCICE 4. Proposez un schéma d'encodage pour une carte d'identité. Ne tenez compte que des informations visuelles qui y sont inscrites.

EXERCICE 5. Proposez un schéma d'encodage pour un labyrinthe constitué uniquement de segments horizontaux et verticaux.

EXERCICE 6. **1.** Écrivez un algorithme qui décide si un mot $u = u_1u_2 \dots u_n$ est un palindrome ou non en le parcourant "simultanément" de la gauche vers la droite et de la droite vers la gauche à l'aide de deux indices i et j initialisés respectivement à 1 et n.

2. Montrez que votre algorithme s'arrête.

3. Justifiez votre algorithme.

4. Combien d'instructions sont exécutées dans le meilleur des cas et dans le pire des cas ?

1. Version du 13 décembre 2022, 11 : 08

EXERCICE 7. † On rappelle la deuxième mouture de l'algorithme du cours qui décide si un mot $u = u_1u_2\dots u_n$ est un palindrome :

(1) On initialise une variable i à 1.

(2) Tant que $(i \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $u_i = u_{n-i+1})$, incrémenter i.

(3) Si $i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ alors u est un palindrome, sinon ce n'est pas un palindrome.

On se propose d'évaluer le nombre *moyen* de tests effectués par cet algorithme, c'est-à-dire le nombre de fois où l'algorithme va évaluer l'expression logique (on néglige le test final après la boucle qui permet de conclure) :

$$(i \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) \quad \wedge \quad (u_i = u_{n-i+1}). \tag{1}$$

On veut calculer cette moyenne en fonction de la longueur n des mots. La motivation initiale pour cet algorithme était évidemment liée à la langue française, mais dans ce cas l'analyse en moyenne nécessiterait une étude exhaustive des mots de notre langue pour chaque longueur n possible.

Pour simplifier le problème et permettre une analyse plus générale, on suppose que l'on dispose d'un alphabet A de cardinal q, que l'espace des instances de l'algorithme est le langage A^n et que toutes les instances sont équiprobables. Notons que cette hypothèse d'équiprobabilité est très éloignée de la réalité, un mot de longueur 3 de la langue française qui commence par qu est certainement suivi par l'une des voyelles e, i ou o.

L'expérience aléatoire consiste donc à tirer un mot u de A^n “au hasard”, l'espace d'échantillonnage Ω est alors le langage A^n. On note $p(u)$ le nombre de fois où l'expression (1) a été évaluée lors de l'exécution de l'algorithme pour l'instance u. Pour $k \in [1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1]$, on définit l'évènement

$$\Omega_k := \{u \in \Omega \mid p(u) = k\}.$$

(1) On supposera pour simplifier les expressions que v désigne le mot miroir de u. Justifiez que

$$\text{Prob}\,[\Omega_k] = \begin{cases} \text{Prob}\,[u_k \neq v_k] \times \displaystyle\prod_{i=1}^{k-1} \text{Prob}\,[u_i = v_i] & \text{si } k \in [1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor], \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \text{Prob}\,[u_i = v_i] & \text{si } k = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1. \end{cases} \tag{II}$$

(2) Montrez que

$$\forall i \in [1, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor], \quad \text{Prob}\,[u_i = v_i] = \frac{1}{q} \text{ et } \text{Prob}\,[u_i \neq v_i] = 1 - \frac{1}{q}$$

(3) Montrez que les évènements Ω_k sont incompatibles.

(4) Montrez qu'aucun des ensembles Ω_k n'est vide.

(5) Montrez que la réunion des ensembles Ω_k est l'ensemble $\Omega := A^n$.

(6) En déduire que le nombre moyen de tests pour traiter un mot de longueur n est égal à

$$(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1) \left(\frac{1}{q}\right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + (q-1) \underbrace{\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} k \left(\frac{1}{q}\right)^k}_{S}. \tag{2}$$

(7) Calculez l'expression (2). Indication : cf. chapitre de combinatoire pour calculer la somme S.

(8) Quelle est le nombre moyen de tests effectués, asymptotiquement sur la longueur des mots ?