**Algorithmique III. L2 Informatique I41.**

TD 7. Le tri par tas[1]

**EXERCICE 1.** On considère la liste $L = [11, 2, 1, 8, 6, 5, 9, 4, 7, 10, 3, 2, 8]$. Appliquez l'algorithme du tri par tas à la liste $L$ en décomposant les étapes de la transformation de $L$ en tas, puis du tri de ce tas. Inutile de décomposer un tamisage, il suffira de matérialiser le chemin parcouru par le père en gras.

**Solution.** On transforme d'abord $L$ en tas, l'indice du premier nœud à considérer est $k := \lfloor \frac{13}{2} \rfloor = 6$ puisque $\#L = 13$. Dans la figure 1, le père est en noir et le fils avec lequel il y a échange en orange (en gris sinon). À l'étape $(e)$, on a d'abord échangé 2 et 10 puis 2 et 6 lors du tamisage du nœud d'indice 2.

À ce stade, la liste est devenue le tas $L = [11, 10, 9, 8, 6, 8, 1, 4, 7, 2, 3, 2, 5]$. Les échanges entre la tête et la fin de liste sont matérialisés en bleu et les valeurs définitivement placées sont entourées en traitillés dans la figure 2. Nous n'illustrons que les 4 premiers échanges et les tamisages qui suivent.

**EXERCICE 2.** Soit $A = (X, U)$ un arbre binaire enraciné non-vide.

**(1)** Exprimez en logique des prédicats que tout nœud différent de la racine de l'arbre admet un unique prédécesseur.

**(2)** Démontrez cette proposition.

**Solution. (1)** On note $r$ la racine de cet arbre. Voici deux propositions possibles (entre autres) :

$$(a) \quad \forall x \in X \backslash \{r\} \ \ \exists! p \in X \ \ (p, x) \in U$$

$$(b) \quad \forall x \in X \ \ (x \neq r) \Rightarrow (|\Gamma^{-1}(x)| = 1)$$

**(2)** Si $X$ est réduit à la racine ou ne contient que la racine et un nœud, c'est évident. Supposons que $|X| \geqslant 3$. D'après la définition d'un arbre enraciné, tous les nœuds différents de la racine admettent (au moins) un prédécesseur. Montrons qu'il ne peut y en avoir qu'un par l'absurde. Supposons qu'un nœud interne $x$ admette deux prédécesseurs $a_0$ et $b_0$,

1. Version du 6 avril 2023, 07 : 23

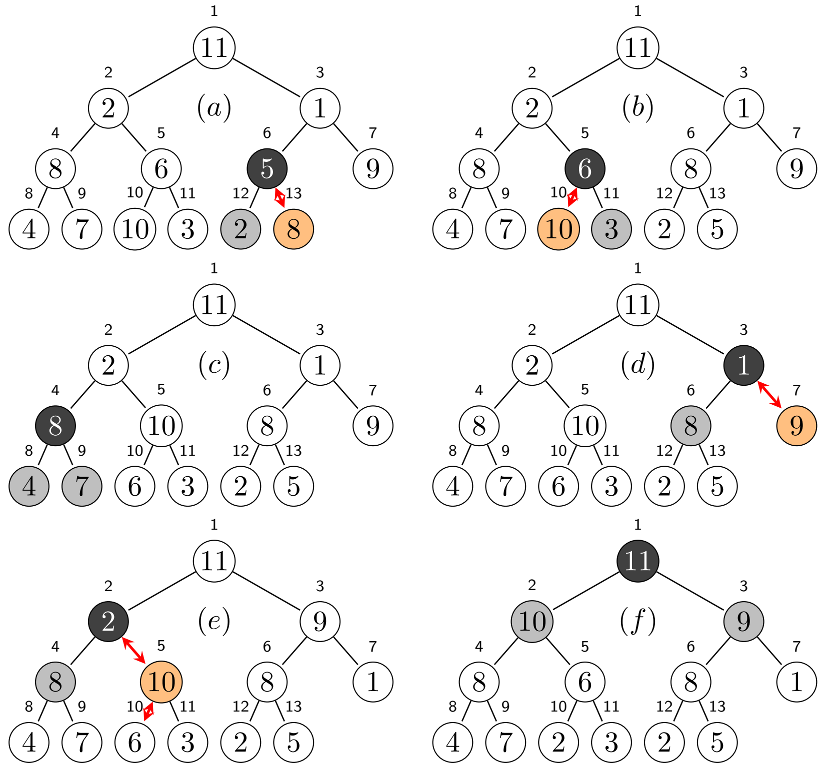



FIGURE 1. Transformation de $L$ en tas.

alors on construit inductivement et alternativement un prédécesseur $a_{i+1}$ de $a_i$ et $b_{j+1}$ de $b_j$ sauf si $a_i = r$ ou $b_j = r$, auquel cas on continue la construction de l'autre suite dont les nœuds sont distincts de tous ceux construits précédemment, sans quoi on aurait un cycle contredisant la définition d'un arbre (cf. fig. 3). Mais alors l'arbre ainsi construit serait infini ce qui encore une fois contradictoire.

**EXERCICE 3.** Soit $T$ un tas non-vide.

**(1)** Exprimez en logique des prédicats que la première valeur d'un tas est la valeur maximale.

**(2)** Démontrez le.

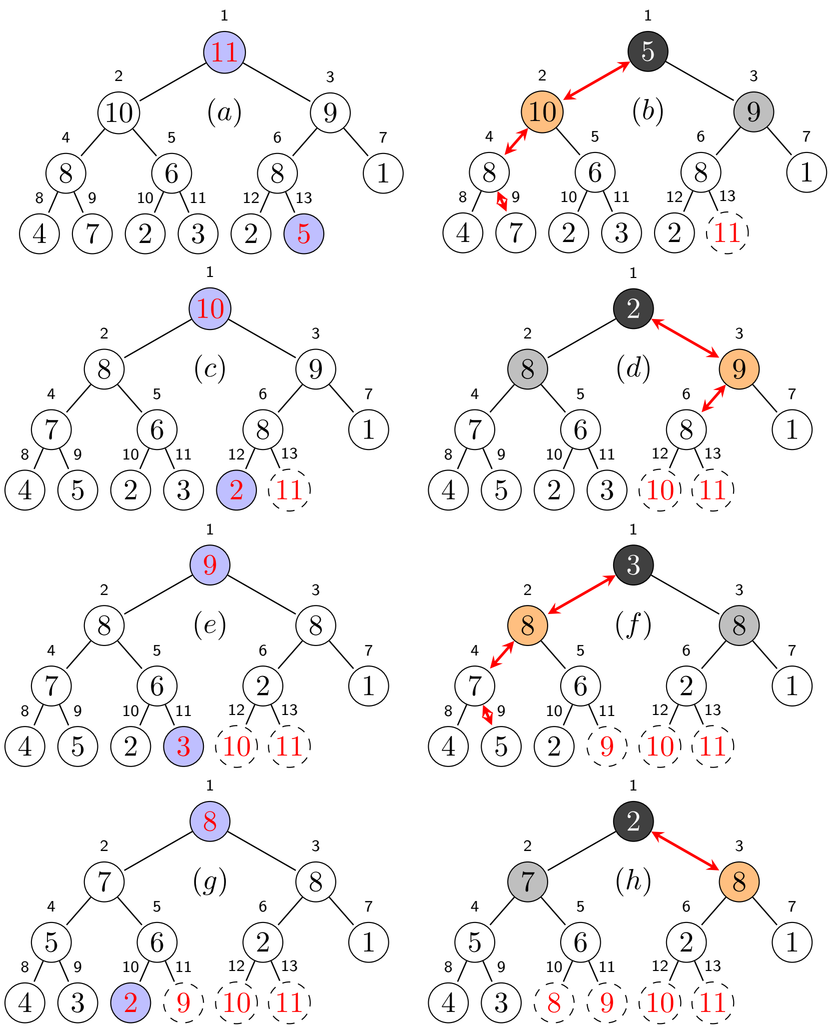

FIGURE 2. Tri du tas. Après les 4 premiers échanges et tamisages on a $L = [8, 7, 2, 5, 6, 2, 1, 4, 3, \underline{8}, \underline{9}, \underline{10}, \underline{11}]$

**Solution. (1)** En définissant $n := \#T$, voici deux propositions possibles :

$$(a) \quad T[1] = \max\{T[i] \mid i \in [\![1, n]\!]\}$$

$$(b) \quad \forall k \in [\![1, n]\!] \;\; T[1] \geqslant T[k]$$

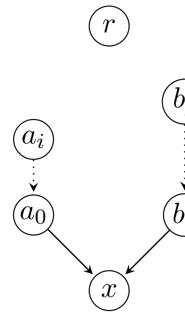

FIGURE 3. Construction d'un cycle.

**(2)** Soit $k \in [\![1, n]\!]$. On sait que dans un arbre il existe un unique chemin qui relie deux nœuds. Notons $i_1\, i_2\, \ldots\, i_r$ celui qui relie la racine $i_1 = 1$ au nœud $i_r = k$. La propriété d'ordre partiel de l'arbre associé au tas $T$ assure que $\forall j \in [\![1, r-1]\!]\;\; T[i_j] \geqslant T[i_{j+1}]$ et la transitivité de l'inégalité nous donne le résultat :

$$\forall k \in [\![1, n]\!] \;\; T[1] \geqslant T[k].$$

**EXERCICE 4.** Écrivez une version itérative de l'algorithme Tamiser.

**Solution.** Comme pour l'algorithme original, la variable ifils est calculée pour correspondre à l'indice du fils qui a la plus grande valeur, qu'il y ait uniquement le fils gauche ou les deux. La première condition s'assure qu'il y a bien deux fils avant de les comparer.

```
ALGORITHME Tamiser(@T,ipere,ifin)
DONNEES
 · T: tableau de valeurs
 · ipere,ifin: entiers
VARIABLES
 · continuer: booléen
 · ifils: entier
DEBUT
 · continuer ← VRAI
 · TQ continuer ET (2*ipere <= ifin) FAIRE
 ·  · continuer ← FAUX
 ·  · ifils ← 2*ipere
 ·  · SI (ifils < ifin) ET (T[ifils+1] > T[ifils]) ALORS
 ·  ·  · ifils ← ifils + 1
 ·  · FSI
```

```
·  · SI (ifils <= ifin) ET (T[ipere] < T[ifils]) ALORS
·  ·  · continuer ← VRAI
·  ·  · Echanger(T,ipere,ifils)
·  ·  · ipere ← ifils
·  · FSI
· FTQ
FIN
```

**EXERCICE 5.** Soit $A = (X, U)$ un arbre binaire enraciné de racine $r$ dont les sous-arbres gauche et droit sont des APO. Démontrez que l'arbre obtenu après l'application de l'algorithme Tamiser à $r$ est un APO.

**Solution.** Si la valeur en $r$ est supérieure à ses deux fils, l'algorithme s'arrête et l'arbre $A$ est un APO. Dans le cas contraire, l'échange ne se faisant que sur l'un des deux sous-arbres, la propriété APO reste satisfaite pour l'autre. Le raisonnement s'applique inductivement à ce sous-arbre jusqu'à ce qu'une feuille soit atteinte.

**EXERCICE 6.** Trouvez un contre-exemple qui prouve que le tri par tas n'est pas stable.

**Solution.** Il suffit de trier la liste $T = [1_a, 1_b]$. C'est trivialement un tas et la première opération de tri commence par l'échange entre la tête de la liste et la fin de la liste, soit $T = [1_b, 1_a]$.

**EXERCICE 7.** On considère un tableau de taille $n$ indexé de 1 à $n$ et l'arbre binaire équilibré associé de profondeur $p$.

**(1)** Soit $k \in [\![0, p-1]\!]$. Démontrez que le nombre de nœuds à la profondeur $k$ est égal à $2^k$. Indication : faites une récurrence finie.

**(2)** En déduire que le nœud d'index $i$ est à la profondeur $\lfloor \log_2(i) \rfloor$. Exprimez la profondeur $p$ de l'arbre en fonction de la taille $n$ du tableau.

**(3)** Définissez en logique des prédicats le plus grand indice $\hat{\imath}$ des nœuds internes (i.e. qui ne sont pas des feuilles) puis démontrez que $\hat{\imath} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. On admettra que le fils gauche (resp. droit) d'un nœud d'indice $i$ a pour indice $2i$ (resp. $2i+1$).

**Solution. (1)** On considère un arbre binaire équilibré $A$ de profondeur $p$ et le prédicat $P(k)$ sur l'intervalle $[\![0, p-1]\!]$ suivant : le nombre de nœuds à la profondeur $k$ est égal à $2^k$. La propriété $P(0)$ est vraie, en effet, à la profondeur 0 il n'y a que la racine. Par construction d'un arbre binaire équilibré, chaque nouveau niveau de l'arbre, sauf le dernier à la profondeur $p$, est constitué de tous les fils des nœuds du niveau précédent, il y a en a donc deux fois plus, soit $2 \times 2^k = 2^{k+1}$ d'après l'hypothèse de récurrence, prouvant ainsi que $P(k+1)$ est vrai. On en conclut que pour tout entier $k \in [\![0, p-1]\!]$, le nombre de nœuds à la profondeur $k$ est égal à $2^k$.

**(2)** On considère le prédicat $P(k)$ sur l'intervalle $[\![0, p-1]\!]$ suivant : les $2^k$ indices des nœuds à la profondeur $k$ sont les entiers de l'intervalle $I_k := [\![2^k, 2^{k+1} - 1]\!]$. La propriété $P(0)$ est vraie puisque la racine a pour index 1. Supposons que la propriété soit vraie au rang $k$, le premier indice à la profondeur $k+1$ est donc égal à $2^{k+1} - 1 + 1 = 2^{k+1}$ et comme il y a $2^{k+1}$ nœuds à la profondeur $k+1$, les indices des nœuds à cette profondeur appartiennent cette fois à l'intervalle $I_{k+1}$ prouvant ainsi $P(k+1)$. On vérifie aisément que les intervalles $I_k$ forment une partition de $\mathbb{N}^*$, ainsi pour tout indice $i \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $k \in \mathbb{N}$ tel que $i \in I_k$ et donc

$$2^k \leqslant i < 2^{k+1}.$$

La fonction logarithme étant croissante, on en déduit que

$$k \leqslant \log_2(i) < k+1.$$

On rappelle que la partie entière d'un réel $x$, notée $\lfloor x \rfloor$, est l'unique entier $k$ qui satisfait

$$k \leqslant x < k+1.$$

On a donc $k = \lfloor \log_2(i) \rfloor$ ce qui nous fournit la profondeur de l'arbre

$$p = \lfloor \log_2(n) \rfloor.$$

**(3)** Les feuilles sont des nœuds qui n'ont pas de fils, l'indice $i$ d'une feuille doit donc satisfaire $2i < n$, on en déduit :

$$\hat{\imath} := \max\{i \in [\![1, n]\!] \mid 2i < n\}. \tag{1}$$

On conclut que $\hat{\imath}$ est le plus grand entier $i$ qui satisfait l'inégalité $i < \frac{n}{2}$, soit $\hat{\imath} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.