

## Algorithmique III. L2 Informatique I41.

### TD 3. Complexité et notations asymptotiques<sup>1</sup>

Dans tous les exercices,  $\mathcal{F}$  désigne l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}_+^*$  dont la variable est dénotée  $n$ .

**EXERCICE 1.** (1) En utilisant les notations asymptotiques, évaluez la fonction de coût en temps  $C(n, m)$  de chacun des 4 algorithmes ci-dessous où  $n$  et  $m$  sont les paramètres de ces algorithmes.

00 ALGORITHME A(n,m)	00 ALGORITHME B(n,m)
01 DONNEES	01 DONNEES
02 · n,m:entiers	02 · n,m:entiers
03 VARIABLES	03 VARIABLES
04 · i,j:entiers	04 · i,j:entiers
05 DEBUT	05 DEBUT
06 · i ← 0	06 · i ← 0
07 · j ← 0	07 · j ← 0
08 · TQ (i < n) ET (j < m) FAIRE	08 · TQ (i < n) OU (j < m) FAIRE
09 · · i ← i + 1	09 · · i ← i + 1
10 · · j ← j + 1	10 · · j ← j + 1
11 · FTQ	11 · FTQ
12 FIN	12 FIN
00 ALGORITHME C(n,m)	00 ALGORITHME D(n,m)
01 DONNEES	01 DONNEES
02 · n,m:entiers	02 · n,m:entiers
03 VARIABLES	03 VARIABLES
04 · i,j:entiers	04 · i,j:entiers
05 DEBUT	05 DEBUT
06 · i ← 0	06 · i ← 0
07 · j ← 0	07 · j ← 0
08 · TQ (j < m) FAIRE	08 · TQ (j < m) FAIRE
09 · · SI (i < n) ALORS	09 · · SI (i < n) ALORS
10 · · · i ← i + 1	10 · · · i ← i + 1
11 · · · SINON ·	11 · · · SINON ·
12 · · · j ← j + 1	12 · · · j ← j + 1
13 · · · FSI	13 · · · i ← 0
14 · FTQ	14 · · FSI
15 FIN	15 · FTQ
	16 FIN

(2) Pourquoi les fonctions de coût de ces algorithmes ainsi calculées ne sont pas leurs fonctions de complexité? Quels paramètres faudrait-il utiliser pour le faire?

**EXERCICE 2.** Donnez des exemples de fonctions qui sont en  $\Omega(n^2)$  mais pas en  $\Theta(n^2)$ .

**EXERCICE 3.** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathcal{F}$ . Démontrez que

$$f = \Theta(g) \Leftrightarrow (f = O(g)) \wedge (f = \Omega(g)). \quad (1)$$

**EXERCICE 4.** Soit  $f$  et  $g$  deux fonctions de  $\mathcal{F}$ . Démontrez que

$$f = O(g) \Leftrightarrow g = \Omega(f). \quad (2)$$

**EXERCICE 5.** Soit  $f \in \mathcal{F}$ . Montrez que si  $f$  est définie par  $f(n) := 3n^2 + 7$ , alors  $f = O(n^2)$  et que si  $f$  est définie par  $f(n) := 3n^3 - 2n + 1$ , alors  $f = \Omega(n^3)$ .

**EXERCICE 6.** Montrez que si  $f$  est une fonction polynomiale de degré  $d$  à coefficient dominant positif (i.e. le monôme de plus haut degré a un coefficient positif), alors

$$f = \Theta(n^d). \quad (3)$$

**EXERCICE 7.** Soit  $g \in \mathcal{F}$ . Montrez que si  $k \in \mathbb{R}$  est une constante strictement positive, alors

$$k \times O(g) = O(g)$$

mais qu'en revanche

$$n \times O(g) = O(ng).$$

**EXERCICE 8.** Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculez et/ou simplifiez :

- |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|
| (1) $\Theta(n) + \Theta(n)$ | (5) $O(n)O(n)$              |
| (2) $O(n) + \Theta(n)$      | (6) $n\Theta(1)$            |
| (3) $\Theta(n) + \Theta(1)$ | (7) $O(n) + O(n^2)$         |
| (4) $O(n) + \Omega(n)$      | (8) $\Theta(\log_2(n) + n)$ |

**EXERCICE 9.** Démontrez que la fonction définie par  $n \mapsto n^2$  est en  $o(n^3)$ .

1. Version du 21 février 2024, 08 : 15

**EXERCICE 10.** (1) Démontrez que la somme de la série de terme général  $2^{-n}$  est égale à 2.

(2) Démontrez que la série harmonique de terme général  $\frac{1}{n}$  n'est pas convergente en utilisant une [minoration par une intégrale](#).

(3) En remarquant que

$$1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{> \frac{1}{4} + \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}} + \dots$$

démontrez d'une autre façon que cette série est divergente.

**EXERCICE 11.** Deux algorithmes  $A$  et  $B$  sur la machine RAM résolvent le même problème et ont respectivement pour complexité moyenne les fonctions  $\overline{T}_A(n) := 1220n + 654$  et  $\overline{T}_B(n) := \frac{1}{4}n^2 + 4n - 63$  où  $n$  désigne la taille des données à traiter. Quelle est la plus petite valeur de  $n$  pour laquelle l'algorithme  $A$  est plus efficace que l'algorithme  $B$  ?