Algorithmique IV (UE-41) - TD 7.

TD 7. Le tri par tas[1]

EXERCICE 1. Décomposez les étapes du tri par tas de la liste $L = [11, 2, 1, 8, 6, 5, 9, 4, 7, 10, 3, 2, 8]$ en les matérialisant sur l'arbre binaire associé. Inutile de décomposer un tamisage, contentez-vous de surligner le chemin parcouru par la valeur du père dans l'arbre.

EXERCICE 2. Soit $A = (X, U)$ un arbre binaire enraciné non-vide.

(1) Exprimez en logique des prédicats que tout nœud différent de la racine de l'arbre admet un unique prédécesseur.

(2) Démontrez cette proposition.

EXERCICE 3. Soit T un tas non-vide.

(1) Exprimez en logique des prédicats que la première valeur d'un tas est la valeur maximale.

(2) Démontrez cette proposition.

EXERCICE 4. Démontrez que lors du tri d'un tas de longueur $n \geqslant 4$, l'algorithme Tamiser réalise au moins $n-3$ échanges. On ne compte donc pas les $n-1$ échanges réalisés par l'algorithme pour placer la valeur maximale en fin de liste avant l'appel à Tamiser. On suppose que les listes sont des permutations de $[\![1, n]\!]$.

Indication : démontrez qu'à chaque appel de l'algorithme Tamiser, celui-ci réalise nécessairement un échange entre la valuation de la racine et celle de l'un de ses deux fils si le tas contient au moins quatre valeurs.

EXERCICE 5. Soit $A = (X, U)$ un arbre binaire enraciné de racine r dont les sous-arbres gauche et droit sont des APO. Démontrez que l'arbre obtenu après l'application de l'algorithme Tamiser à r est un APO.

EXERCICE 6. Trouvez un contre-exemple qui prouve que le tri par tas n'est pas stable.

1. Version du 13 janvier 2025, 11 : 16

EXERCICE 7. On considère un tableau de taille n indexé de 1 à n et l'arbre binaire équilibré associé de profondeur p.

(1) Soit $k \in [\![0, p-1]\!]$. Démontrez que le nombre de nœuds à la profondeur k est égal à 2^k. Indication : faites une récurrence finie.

(2) En déduire que le nœud d'index i est à la profondeur $\lfloor \log_2(i) \rfloor$. Exprimez la profondeur p de l'arbre en fonction de la taille n du tableau.

(3) Définissez en logique des prédicats le plus grand indice $\hat{\imath}$ des nœuds internes (i.e. qui ne sont pas des feuilles) puis démontrez que $\hat{\imath} = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. On admettra que le fils gauche (resp. droit) d'un nœud d'indice i a pour indice $2i$ (resp. $2i+1$).