Algorithmique IV (UE-41) - TD 1.

TD 1. Généralités[1]

EXERCICE 1. Calculer la somme des valeurs obtenues en lançant 10 fois de suite un dé à 6 faces constitue-t-il un algorithme ? Justifiez votre réponse.

EXERCICE 2. Un *organigramme* est une description schématique d'un algorithme. Les instructions sont rangées dans des boites reliées par des flèches indiquant leur chronologie.

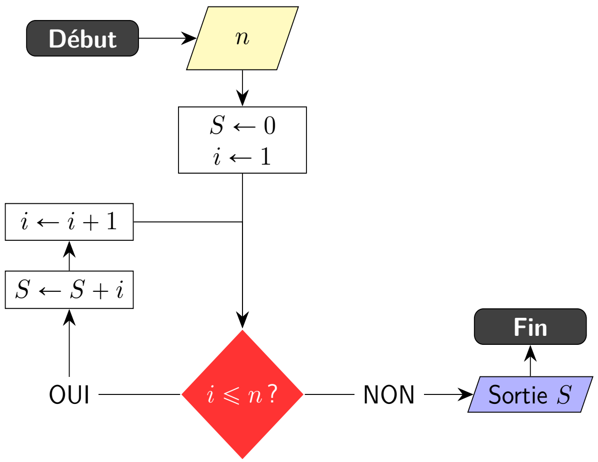

FIGURE 1. Organigramme du programme calculant la somme des n premiers entiers.

Ces boites ont des formes différentes selon la nature des instructions qu'elles contiennent, ovales pour le début et la fin, trapézoïdales pour les entrées/sorties (sur fond jaune pour les entrées et bleu pour les sorties ici), losanges pour les tests, et rectangulaires pour les autres instructions.

L'algorithme calculant la somme des n premiers entiers naturels non-nuls est présenté sous forme d'organigramme en figure 1. Écrivez sous forme d'*organigramme* l'algorithme de résolution d'une équation polynomiale $aX^2 + bX + c = 0$ dans le corps des réels $\mathbb{R}$ (les coefficients du polynôme ne sont pas nécessairement non-nuls).

EXERCICE 3. Proposez un schéma d'encodage pour décrire les positions des pièces sur un échiquier (voir la figure 2). On rappelle qu'il y a 6 types de pièces : pions, tours, fous, cavaliers, rois et dames.

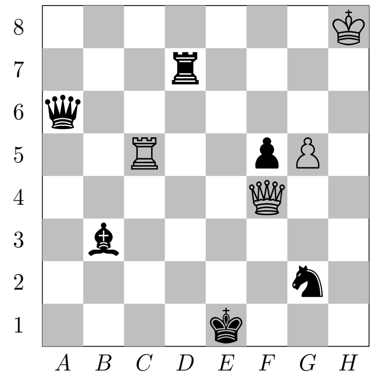

FIGURE 2. Une position sur un échiquier.

EXERCICE 4. Proposez un schéma d'encodage pour une carte d'identité. Ne tenez compte que des informations visuelles qui y sont inscrites.

EXERCICE 5. Proposez un schéma d'encodage pour un labyrinthe constitué uniquement de segments horizontaux et verticaux.

EXERCICE 6. **(1)** Écrivez un algorithme qui décide si un mot $u = u_1 \dots u_n$ est un palindrome ou non en le parcourant "simultanément" de la gauche vers la droite et de la droite vers la gauche à l'aide de deux indices i et j initialisés respectivement à 1 et n.

(2) Montrez que votre algorithme s'arrête.

(3) Justifiez votre algorithme.

(4) Combien d'instructions sont exécutées dans le meilleur des cas et dans le pire des cas ?

1. Version du 27 janvier 2025, 18 : 10

EXERCICE 7. † On rappelle la deuxième mouture de l'algorithme du cours qui décide si un mot $u = u_1 u_2 \dots u_n$ est un palindrome :

(1) On initialise une variable i à 1.

(2) Tant que $(i \leqslant \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $u_i = u_{n-i+1})$, incrémenter i.

(3) Si $i > \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ alors u est un palindrome, sinon ce n'est pas un palindrome.

(1) Écrivez cet algorithme dans le pseudo-langage algorithmique du cours.

On se propose d'évaluer le nombre *moyen* de tests effectués par la boucle dans cet algorithme, c'est-à-dire le nombre de fois où l'algorithme évalue l'expression logique :

$$(i \leqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor) \wedge (u_i = u_{n-i+1}). \tag{1}$$

On veut calculer cette moyenne en fonction de la longueur n des mots. La motivation initiale pour cet algorithme était évidemment liée à la langue française, mais dans ce cas l'analyse en moyenne nécessiterait une étude exhaustive des mots de notre langue pour chaque longueur n possible.

Pour simplifier le problème et permettre une analyse plus générale, on suppose que l'on dispose d'un alphabet $A = \{a_1, \dots, a_q\}$ de cardinal $q \geqslant 2$ (sans quoi tous les mots sont des palindromes), que l'espace Ω des instances de l'algorithme est le langage A^n et que toutes les instances sont équiprobables [2]

L'expérience aléatoire consiste donc à tirer un mot u de A^n "au hasard". On pose $\Omega := A^n$ et on note $\eta(u)$ le nombre de fois où (1) a été évaluée et $m := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Pour $k \in [\![1, m+1]\!]$, on définit l'évènement

$$\Omega_k := \{u \in \Omega \mid \eta(u) = k\}.$$

(2) Justifiez que

$$\mathbb{P}(\Omega_k) = \begin{cases} \left(\prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{P}(u_i = u_{n-i+1})\right) \times \mathbb{P}(u_k \neq u_{n-k+1}) & \text{si } k \in [\![1, m]\!], \\ \prod_{i=1}^{m} \mathbb{P}(u_i = u_{n-i+1}) & \text{si } k = m+1. \end{cases} \tag{II}$$

(3) Montrez que

$$\forall i \in [\![1, m]\!] \quad \left(\mathbb{P}(u_i = u_{n-i+1}) = \frac{1}{q}\right) \wedge \left(\mathbb{P}(u_i \neq u_{n-i+1}) = 1 - \frac{1}{q}\right).$$

(4) Montrez que la famille $(\Omega_k)_{k \in [\![1, m+1]\!]}$ forme une partition de Ω.

(5) Si $m := \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, en déduire que le nombre moyen de tests $\overline{T}(n)$ pour traiter un mot de longueur n est donné par

$$\overline{T}(n) = \frac{(m+1)}{q^m} + (q-1) \underbrace{\sum_{k=1}^{m} k \left(\frac{1}{q}\right)^k}_{S(q,k)}. \tag{2}$$

(6) Calculez l'expression (2). Indication : cf. chapitre de combinatoire pour calculer la somme $S(q, k)$.

(7) Quelle est le nombre moyen de tests effectués, asymptotiquement sur la longueur des mots ?

2. L'hypothèse d'équiprobabilité est très éloignée de la réalité, par exemple un mot de longueur trois de la langue française qui commence par les deux lettres `qu` est *certainement* suivi par l'une des voyelles `e`, `i` ou `o`.