Master DAPM - Complexité Algorithmique - Session 2

mercredi 28 juin 2017. 09h00-12h00. Salle U025-026

La précision et la clarté de votre rédaction sont *fondamentales*. Chaque réponse doit être accompagnée d'une justification. Lisez attentivement l'énoncé avant toute tentative de raisonnement. Le barème est donné à titre indicatif. Documents interdits. Durée 3 heures.

Exercice 1. [2 pts] Enoncez l'axiome d'extension, l'axiome de sélection et l'axiome de l'infini. Soit P une partie de $\mathbf{N}$. Quel(s) axiome(s) est/sont utilisé(s) pour justifier l'existence de l'ensemble

$$\{x \in P, \mid \sharp x = 3\}.$$

Que contient cet ensemble ? Quel est le prédicat utilisé pour définir cet ensemble ?

Exercice 2. [7 pts] On admettra que tout nombre réel $x \in]-1,1[$ admet un développement binaire illimité, c'est-à-dire une suite binaire $b = b_0, b_1, b_2, \ldots$ telle que

$$x = (-1)^{b_0} \sum_{i>0} \frac{b_i}{2^i}$$

Par exemple,

$$0,34375 = (-1)^{\mathbf{0}}(\frac{\mathbf{0}}{2^1} + \frac{\mathbf{1}}{2^2} + \frac{\mathbf{0}}{2^3} + \frac{\mathbf{1}}{2^4} + \frac{\mathbf{1}}{2^5} + \frac{\mathbf{0}}{2^6} + \frac{\mathbf{0}}{2^7} + \cdots)$$

1. [1 pt] Quel est le développement binaire illimité du nombre réel $0,755$?
2. [2 pts] Montrez à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que l'ensemble $\mathcal{B}$ des développements binaires n'est pas dénombrable (utilisez un argument diagonal).
3. [2 pts] Montrez que $]-1,1[\approx \mathbf{R}$ (utilisez la fonction $x \mapsto x/(1-x^2)$). En déduire que $\mathbf{R}$ n'est pas dénombrable.
4. [2 pts] Montrez que $\mathcal{B} \approx \mathcal{P}(\mathbf{N})$ en utilisant la fonction $(b_i)_{i\in\mathbf{N}} \mapsto \{i \in \mathbf{N},\ b_i = 1\}$. En déduire que $\mathbf{R} \approx \mathcal{P}(\mathbf{N})$.

Exercice 3. [6pts] Dans tout l'exercice décrivez d'abord explicitement vos algorithmes en français et commentez les différentes instructions ou groupes d'instructions dans vos programmes sur la machine de Turing.

1. [3pts] On utilise le modèle de la machine de Turing unaire (l'alphabet Σ est limité au bâton). Montrez que la fonction $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ définie par $f(n) = 2n$ est Turing-calculable ?
2. [1pt] Même question avec l'alphabet binaire, $\Sigma = \{0, 1\}$?
3. [2pts] Calculez les fonctions de complexité dans les deux cas.

Exercice 4. [5 pts] On considère les deux problèmes de décision suivants :

Problème du cycle Hamiltonien [CH]
Instance : Un graphe non-orienté $G = (X, U)$.
Question : Existe-t-il un cycle Hamiltonien, c'est-à-dire un chemin qui parcourt une fois et une seule chaque sommet du graphe et qui revient au point de départ.

Problème du voyageur de commerce [VC]
Instance : Un graphe non-orienté $G = (X, U)$, une distance $d : U \to \mathbf{N}$ et une borne B.
Question : Existe-t-il un cycle hamiltonien c'est-à-dire un chemin qui parcourt une fois et une seule chaque sommet du graphe et tel que la distance totale parcourue soit inférieure à B ?

1. [1pt] Montrez que ces deux problèmes sont dans la classe NP.
2. [2pts] Montrez que le problème du cycle hamiltonien est un cas particulier du problème du voyageur de commerce.
3. [1pt] Décrivez comment une machine de Turing pourrait transformer l'encodage d'une instance de [CH] en encodage d'une instance de [VC] ? Quelle serait-la complexité d'une telle machine ?
4. [1pt] Déduisez que si [VC]$\in$ P alors [CH]$\in$ P.