

Master DAPM - Complexité Algorithmique - Session 2

Lundi 04 juillet 2016. 09h00-12h00. Salle T1-202

La précision et la clarté de votre rédaction sont *fondamentales*. Chaque réponse doit être accompagnée d'une justification. Lisez attentivement l'énoncé avant toute tentative de raisonnement. Le barème est donné à titre indicatif. Documents interdits. Durée 3 heures.

Exercice 1. [2 pts] Énoncez l'axiome d'extension, l'axiome de sélection et l'axiome de l'infini. Soit P une partie de \mathbf{N} . Quel(s) axiome(s) est/sont utilisé(s) pour justifier l'existence de l'ensemble

$$\{x \in P, \mid \#x = 3\}.$$

Que contient cet ensemble? Quel est le prédicat utilisé pour définir cet ensemble?

Exercice 2. [7 pts] On admettra que tout nombre réel $x \in]-1, 1[$ admet un développement binaire illimité, c'est-à-dire une suite binaire $b = b_0, b_1, b_2, \dots$ telle que

$$x = (-1)^{b_0} \sum_{i>0} \frac{b_i}{2^i}$$

Par exemple,

$$0,34375 = (-1)^0 \left(\frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \frac{0}{2^7} + \dots \right)$$

- [1 pt] Quel est le développement binaire illimité du nombre réel 0,755?
- [2 pts] Montrez à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que l'ensemble \mathcal{B} des développements binaires n'est pas dénombrable (utilisez un argument diagonal).
- [2 pts] Montrez que $] - 1, 1[\approx \mathbf{R}$ (utilisez la fonction $x \mapsto x/(1-x^2)$). En déduire que \mathbf{R} n'est pas dénombrable.
- [2 pts] Montrez que $\mathcal{B} \approx \mathcal{P}(\mathbf{N})$ en utilisant la fonction $(b_i)_{i \in \mathbf{N}} \mapsto \{i \in \mathbf{N}, b_i = 1\}$. En déduire que $\mathbf{R} \approx \mathcal{P}(\mathbf{N})$.

Exercice 3. [6pts] Dans tout l'exercice décrivez d'abord explicitement vos algorithmes en français et commentez les différentes instructions ou groupes d'instructions dans vos programmes sur la machine de Turing.

- [3pts] On utilise le modèle de la machine de Turing unaire (l'alphabet Σ est limité au bâton). Montrez que la fonction $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ définie par $f(n) = 2n$ est Turing-calculable?
- [1pt] Même question avec l'alphabet binaire, $\Sigma = \{0, 1\}$?
- [2pts] Calculez les fonctions de complexité dans les deux cas.

Exercice 4. [5 pts] On considère les deux problèmes de décision suivants :

Problème du cycle Hamiltonien [CH]

Instance : Un graphe non-orienté $G = (X, U)$.

Question : Existe-t-il un cycle Hamiltonien, c'est-à-dire un chemin qui parcourt une fois et une seule chaque sommet du graphe et qui revient au point de départ.

Problème du voyageur de commerce [VC]

Instance : Un graphe non-orienté $G = (X, U)$, une distance $d : U \rightarrow \mathbf{N}$ et une borne B .

Question : Existe-t-il un cycle hamiltonien c'est-à-dire un chemin qui parcourt une fois et une seule chaque sommet du graphe et tel que la distance totale parcourue soit inférieure à B ?

- [1pt] Montrez que ces deux problèmes sont dans la classe NP.
- [2pts] Montrez que le problème du cycle hamiltonien est un cas particulier du problème du voyageur de commerce.
- [1pt] Décrivez comment une machine de Turing pourrait transformer l'encodage d'une instance de [CH] en encodage d'une instance de [VC]? Quelle serait la complexité d'une telle machine?
- [1pt] Déduisez que si $[VC] \in P$ alors $[CH] \in P$.