Master DAPM - Session 2 - Complexité Algorithmique

Mercredi 01/07/2015. 09h00-12h00. Salle U 025-026

La précision et la clarté de votre rédaction sont *fondamentales*. Chaque réponse doit être accompagnée d'une justification. Lisez attentivement l'énoncé avant de commencer. Le barème est indicatif. Documents interdits. Durée 3 heures.

Exercice 1. [3 pts] Rappelez les définitions d'un ensemble fini et d'un ensemble dénombrable. Soit k un entier fixé, démontrez que l'ensemble des entiers multiples de k est dénombrable.

Exercice 2. [4 pts] Soit $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ la fonction définie par $f(n) := n \pmod 3$.

1. [3 pts] Démontrez que f est Turing-calculable avec l'alphabet unaire $\Sigma := \{!\}$.

2. [1 pt] Calculez le fonction de complexité $t(n)$ de la machine qui calcule la fonction f.

Exercice 3. [7 pts] On définit la fonction *successeur* $\mathrm{succ} : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ par $\mathrm{succ}(n) := n+1$ et la fonction *prédecesseur* $\mathrm{pred} : \mathbf{N} \setminus \{0\} \to \mathbf{N}$ par $\mathrm{pred}(n) := n-1$.

1. [2 pts] Montrez que la fonction succ est Turing-calculable sur l'alphabet $\Sigma := \{0, 1\}$.

2. [3 pts] Montrez que la fonction pred est Turing-calculable sur l'alphabet $\Sigma := \{0, 1\}$.

3. [2 pts] Calculez leurs fonctions de complexités respectives $t_s(k)$ et $t_p(k)$ où k désigne le nombre de bits de l'écriture binaire de n.

Exercice 4. [8pts] On rappelle que $\propto$ est une relation binaire définie sur l'ensemble des problèmes de décision par $\Pi \propto \Pi'$ si et seulement s'il existe une machine de Turing qui transforme les instances I de Π en instances I' de Π' en temps polynomial et telle que $I \in Y_\Pi \Leftrightarrow I' \in Y_{\Pi'}$. On rappelle également qu'un problème de décision Π est dit NP-complet si et seulement s'il appartient à la classe NP et que $\forall \Pi' \in \mathrm{NP}$, $\Pi' \propto \Pi$.

On considère les deux problèmes de décision suivants :

Problème de satisfaisabilité [SAT]
Instance : Un ensemble de n variables booléennes $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et un ensemble de m clauses $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$.
Question : Existe-t-il une table de vérité $T : X \to \{\text{VRAI}, \text{FAUX}\}$ telle que $\mathcal{C}$ est satisfaisable ?

Problème de 3-satisfaisabilité [3-SAT]
Instance : Un ensemble de n variables booléennes $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et un ensemble de m clauses $\mathcal{C} = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ à trois littéraux exactement.
Question : Existe-t-il une table de vérité $T : X \to \{\text{VRAI}, \text{FAUX}\}$ telle que $\mathcal{C}$ est satisfaisable ?

Exemple 1 ▷ $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et $\mathcal{C} = \{\{x_1, \overline{x_2}\}, \{x_1, x_2, \overline{x_4}\}, \{\overline{x_1}, x_2, x_3, \overline{x_4}\}\}$ est une instance de SAT mais pas de 3-SAT car la dernière clause contient 4 littéraux. ◁

1. [1pt] Quelle est la réponse au problème SAT pour l'instance de l'exemple ?

On se propose de démontrer que 3-SAT est un problème NP-complet. Il faut transformer les instances I de SAT en instances J de 3-SAT de manière à ce que I soit satisfaisable si et seulement is J est satisfaisable. Pour cela, on remplace chaque clause C de SAT qui ne contient pas exactement 3 littéraux en un ensemble $f(C)$ de clauses à trois littéraux à l'aide de nouvelles variables booléennes.

2. [1pt] Montrez que 3-SAT appartient à NP.

3. [1pt] Considérons une clause à un seul littéral $C = \{u\}$. Donnons nous deux nouvelles variables v et w. Considérons l'ensemble $f(C)$ des 4 clauses $\{u, v, w\}$, $\{u, v, \overline{w}\}$, $\{u, \overline{v}, w\}$ et $\{u, \overline{v}, \overline{w}\}$. Montrez que C est satisfaisable si et seulement si l'ensemble des clauses de $f(C)$ est satisfaisable en vérifiant que l'expression logique

$$(u \vee v \vee w) \wedge (u \vee v \vee \overline{w}) \wedge (u \vee \overline{v} \vee w) \wedge (u \vee \overline{v} \vee \overline{w})$$

est vraie si et seulement si u est vrai. Indication : construisez la table de vérité ou utilisez l'algèbre de Boole (addition pour la disjonction, multiplication pour la conjonction) pour réduire l'expression.

4. [2pts] En vous inspirant de la question précédente trouvez comment transformer une clause à deux littéraux $C = \{u, v\}$ en un ensemble de clauses à trois littéraux $f(C)$ tel que C est satisfaisable si et seulement si l'ensemble des clauses de $f(C)$ est satisfaisable.

5. [2pts] Considérons une clause $C = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ à k littéraux, $k > 3$. On se donne $k-3$ variables $v_1, v_2, \dots, v_{k-3}$ et l'ensemble $f(C)$ de $k-2$ clauses à trois littéraux suivant :

$$\{u_1, u_2, \boldsymbol{v}_1\}, \{\overline{\boldsymbol{v}}_1, u_3, \boldsymbol{v}_2\}, \{\overline{\boldsymbol{v}}_2, u_4, \boldsymbol{v}_3\}, \dots, \{\overline{\boldsymbol{v}}_{k-4}, u_{k-2}, \boldsymbol{v}_{k-3}\}, \{\overline{\boldsymbol{v}}_{k-3}, u_{k-1}, u_k\}.$$

Montrez que C est satisfaisable si et seulement si les clauses de $f(C)$ sont satisfaisables.

6. [1pt] Montrez que la transformation f est polynomiale et concluez.