

## Master DAPM - Session 2 - Complexité Algorithmique

Jeudi 27/06/2013. 14h00-17h00. Salle U 026

La précision et la clarté de votre rédaction sont *fondamentales*. Chaque réponse doit être accompagnée d'une justification. Lisez attentivement l'énoncé avant toute tentative de raisonnement. Le barème est donné à titre indicatif. Documents interdits. Durée 3 heures.

**Exercice 1.** [2 pts] Énoncez l'axiome d'extension, l'axiome de sélection et l'axiome de l'infini. Soit  $P$  une partie de  $\mathbf{N}$ . Quel(s) axiome(s) est/sont utilisé(s) pour justifier l'existence de l'ensemble

$$\{x \in P, \mid \#x = 3\}.$$

Que contient cet ensemble? Quel est le prédicat utilisé pour définir cet ensemble?

**Exercice 2.** [7 pts] On admettra que tout nombre réel  $x \in ]-1, 1[$  admet un développement binaire illimité, c'est-à-dire une suite binaire  $b = b_0, b_1, b_2, \dots$  telle que

$$x = (-1)^{b_0} \sum_{i>0} \frac{b_i}{2^i}$$

Par exemple,

$$0,34375 = (-1)^0 \left( \frac{0}{2^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{0}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^5} + \frac{0}{2^6} + \frac{0}{2^7} + \dots \right)$$

- [1 pt] Quel est le développement binaire illimité du nombre réel 0,755?
- [2 pts] Montrez à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que l'ensemble  $\mathcal{B}$  des développements binaires n'est pas dénombrable (utilisez un argument diagonal).
- [2 pts] Montrez que  $] - 1, 1[ \approx \mathbf{R}$  (utilisez la fonction  $x \mapsto x/(1-x^2)$ ). En déduire que  $\mathbf{R}$  n'est pas dénombrable.
- [2 pts] Montrez que  $\mathcal{B} \approx \mathcal{P}(\mathbf{N})$  en utilisant la fonction  $(b_i)_{i \in \mathbf{N}} \mapsto \{i \in \mathbf{N}, b_i = 1\}$ . En déduire que  $\mathbf{R} \approx \mathcal{P}(\mathbf{N})$ .

**Exercice 3.** [6pts] Dans tout l'exercice décrivez d'abord explicitement vos algorithmes en français et commentez les différentes instructions ou groupes d'instructions dans vos programmes sur la machine de Turing.

- [3pts] On utilise le modèle de la machine de Turing unaire (l'alphabet  $\Sigma$  est limité au bâton). Montrez que la fonction  $f : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$  définie par  $f(n) = 2n$  est Turing-calculable?
- [1pt] Même question avec l'alphabet binaire,  $\Sigma = \{0, 1\}$ ?
- [2pts] Calculez les fonctions de complexité dans les deux cas.

**Exercice 4.** [5 pts] On considère les deux problèmes de décision suivants :

### Problème du cycle Hamiltonien [CH]

*Instance* : Un graphe non-orienté  $G = (X, U)$ .

*Question* : Existe-t-il un cycle Hamiltonien, c'est-à-dire un chemin qui parcourt une fois et une seule chaque sommet du graphe et qui revient au point de départ.

### Problème du voyageur de commerce [VC]

*Instance* : Un graphe non-orienté  $G = (X, U)$ , une distance  $d : U \rightarrow \mathbf{N}$  et une borne  $B$ .

*Question* : Existe-t-il un cycle hamiltonien c'est-à-dire un chemin qui parcourt une fois et une seule chaque sommet du graphe et tel que la distance totale parcourue soit inférieure à  $B$ ?

- [1pt] Montrez que ces deux problèmes sont dans la classe NP.
- [2pts] Montrez que le problème du cycle hamiltonien est un cas particulier du problème du voyageur de commerce.
- [1pt] Décrivez comment une machine de Turing pourrait transformer l'encodage d'une instance de [CH] en encodage d'une instance de [VC]? Quelle serait-la complexité d'une telle machine?
- [1pt] Déduisez que si [VC]  $\in$  P alors [CH]  $\in$  P.