Master DAPM - Session 1 - Complexité Algorithmique

Lundi 15/04/2012. 12h00-17h00. Salle U 026

La précision et la clarté de votre rédaction sont *fondamentales*. Chaque réponse doit être accompagnée d'une justification. Lisez attentivement l'énoncé avant toute tentative de raisonnement. Le barème est donné à titre indicatif. Documents interdits. Durée 3 heures.

Exercice 1. [2 pts] Enoncez l'axiome d'extension, l'axiome de sélection et l'axiome de l'infini. Quel(s) axiome(s) est/sont utilisé(s) pour justifier l'existence de l'ensemble

$$\{n \in \mathbf{N}, \exists k \in \mathbf{N} \mid n = 2k\}.$$

Que contient cet ensemble ? Quel est le prédicat utilisé pour définir cet ensemble ?

Exercice 2. [5 pts] On se propose de démontrer qu'une réunion finie d'ensembles dénombrables deux-à-deux disjoints est dénombrable.

1. [1 pt] Donnez la définition d'un ensemble fini, d'un ensemble dénombrable et d'un ensemble au plus dénombrable.

2. [2 pts] On note $E_0, \ldots, E_{k-1}$, les k ensembles dénombrables, E leur réunion et $x_{i,j}$ le j-ème élément de l'ensemble E_i, i.e. $E_i = \{x_{i,0}, x_{i,1}, \ldots, x_{i,n}, \ldots\}$. On range tous les éléments de ces ensembles dans un tableau de k lignes constituées des élements de E_i pour $i \in [0, k-1]$:

$$\begin{array}{cccccc} x_{0,0} & x_{0,1} & x_{0,2} & \ldots & x_{0,n} & \ldots \\ x_{1,0} & x_{1,1} & x_{1,2} & \ldots & x_{1,n} & \ldots \\ & & \vdots & & & \\ x_{k-1,0} & x_{k-1,1} & x_{k-1,2} & \ldots & x_{k-1,n} & \ldots \end{array}$$

On veut constituer une suite qui contient tous les élements de E. Donnez l'expression algébrique du i-ème terme u_i de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ constituée par les éléments du tableau lus de haut en bas puis de gauche à droite (contrairement à l'ordre de lecture usuel gauche droite puis haut bas), donc d'abord les k termes de la première colonne du tableau puis les k termes de la deuxième colonne, etc.

3. [2 pts] Montrez que la suite $n \mapsto u_n$ est une bijection de $\mathbf{N}$ dans la réunion E des k ensembles E_i et en déduire que E est dénombrable.

Exercice 3. [3 pts] On utilise le modèle de la machine de Turing binaire, l'alphabet est noté $\{0, 1\}$. On suppose qu'un entier n est représenté sur la bande par son écriture binaire et que la tête de lecture est initialement sur le bit de poids fort (à gauche de la séquence). Montrez que la fonction $f : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ définie par $n \mapsto n + 1$ est Turing-calculable. Quelle est la fonction de complexité de votre algorithme ?

Exercice 4. [5 pts] On utilise le modèle de la machine de Turing unaire (l'alphabet est unaire limité au "bâton"). Dans toute la suite, décrivez d'abord vos algorithmes *en français* puis explicitez leur structure dans les programmes.

1. [3 pts] Montrez que la fonction $f : \mathbf{N} \times \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ définie par

$$f(n, m) := n - m$$

est Turing-calculable (on se limitera au domaine de définition, i.e. on supposera que $n \geq m$). Le couple (n, m) sera représenté par deux séquences consécutives de $n + 1$ bâtons et $m + 1$ bâtons respectivement, les séquences étant séparées par une case vierge.

2. [1 pt] Exprimez la fonction de complexité $t(n, m)$ de votre machine, i.e. le nombre de transitions appliquées pour l'entrée (n, m).

3. [1 pt] La machine ci-dessous calcule-t-elle une fonction ? Si oui, laquelle ?

$$(q_1, |, \Box, q_1)$$
$$(q_1, \Box, \rightarrow, q_2)$$
$$(q_2, |, \Box, q_2)$$
$$(q_2, \Box, \rightarrow, q_3)$$

Exercice 5. [5 pts] On considère les deux problèmes de décision suivants :

Problème du cycle Hamiltonien [CH]
Instance : Un graphe non-orienté $G = (X, U)$.
Question : Existe-t-il un cycle Hamiltonien, c'est-à-dire un chemin qui parcourt une fois et une seule chaque sommet du graphe et qui revient au point de départ.

Problème du voyageur de commerce [VC]
Instance : Un graphe non-orienté $G = (X, U)$, une distance $d : U \to \mathbf{N}$ et une borne B.
Question : Existe-t-il un cycle hamiltonien c'est-à-dire un chemin qui parcourt une fois et une seule chaque sommet du graphe et tel que la distance totale parcourue soit inférieure à B ?

1. [1pt] Montrez que ces deux problèmes sont dans la classe NP.

2. [2pts] Montrez que le problème du cycle hamiltonien est un cas particulier du problème du voyageur de commerce.

3. [1pt] Décrivez comment une machine de Turing pourrait transformer l'encodage d'une instance de [CH] en encodage d'une instance de [VC] ? Quelle serait-la complexité d'une telle machine ?

4. [1pt] Déduisez que si [VC]$\in$ P alors [CH]$\in$ P.