

CODAGE D'UN SIGNAL AUDIO-NUMÉRIQUE SUR UN SUPPORT À LECTURE OPTIQUE

J.-P. ZANOTTI

TABLE DES MATIÈRES

Introduction	1
1. Acoustique et haute-fidélité	2
1.1. Techniques de reproduction sonore	2
1.2. Acoustique et performances du CD	4
1.3. La conversion analogique-numérique	9
1.4. La conversion numérique-analogique	11
2. Le code d'enregistrement EFM	11
2.1. Généralités.	11
2.2. Un premier codage.	14
2.3. Le codage EFM	16
2.4. Le code $(2, 7)$ de P. A. Franaszek	20
3. Le code correcteur CIRC	22
3.1. Nécessité de la correction des erreurs.	22
3.2. Codes raccourcis, codes démultipliés.	23
3.3. Effacements, paquets d'erreurs.	25
3.4. Entrelacements.	26
3.5. Application : le code CIRC	28
4. Autres supports	31
4.1. Le vidéo-disque	31
4.2. La DAT	33
4.3. Le MOD	33
Références	34

INTRODUCTION

La part de plus en plus importante qu'occupent les médias dans notre société moderne nous prouve à quel point l'information est devenue une caractéristique de notre époque. La demande sans cesse croissante de nouveaux moyens de communication, dans des secteurs aussi variés que les télécommunications, la recherche spatiale, l'audio-visuel ou l'informatique, est à l'origine d'une discipline scientifique à part entière, la théorie de l'information.

C'est dans les années 40 que Claude Shannon jeta les bases scientifiques de cette nouvelle théorie et ses travaux furent à l'origine de nombreuses études dont les

répercussions actuelles sont considérables. Le codage de l'information est un pilier de cette théorie, et il s'avère aujourd'hui que de nombreuses applications n'auraient pu voir le jour sans les outils qui y sont développés. On imagine très souvent que cette théorie n'a sa place que dans des domaines très particuliers, et surtout hors de portée du commun des mortels, sondes spatiales, satellites de télécommunication, matériels militaires etc. Le disque compact est là pour nous prouver le contraire.

Le disque compact est très certainement une des réussites populaires les plus magistrales de ce siècle. Rarement une invention avait suscité un tel enthousiasme de la part du public. Les raisons sont variées, un support agréable – bien que certains regrettent les vieilles galettes en vinyl – une qualité d'écoute hors du commun, et une facilité d'emploi inégalée. L'apparente simplicité de ce produit, aujourd'hui banalisé, cache pourtant une débauche de technologie et les moyens mis en œuvre pour le réaliser dénote une certaine dose de génie de la part des concepteurs.

Dans cet article, nous nous sommes intéressés aux multiples aspects du codage de l'information, bien que l'aspect essentiel ait été la partie du codage correcteur. Dans une première partie nous rappelons les notions élémentaires d'acoustique musicale, essentielles à la compréhension des problèmes que l'on rencontre lorsque l'on veut reproduire de la musique, et les grands principes de la numérisation d'un signal. La deuxième section est consacrée à l'étude du code à l'enregistrement EFM (acronyme de *Eight-to-Fourteen Modulation*). Il y a là matière à développement car il semblerait qu'un code d'enregistrement développé par P. A. Franaszek pour IBM soit plus adapté à la situation. Le noyau de cette étude est contenu dans la troisième section, il concerne le codage correcteur CIRC (*Cross-Interleaved Reed-Solomon Code*) employé dans le système du disque compact. La dernière section présente d'autres supports qui nécessitent le même type de traitement.

Les deux premières sections de cet article ne demandent que des connaissances générales en mathématiques du traitement du signal. Ainsi, les problèmes liés à la conception du système du disque compact ont pu être exposés de manière progressive. Il était par contre impossible, sans rallonger considérablement l'exposé, de procéder de la même manière pour la dernière section sur les codes correcteurs. Nous ne rappelons que le strict nécessaire, le lecteur pourra consulter [1, 12, 11, 3] pour de plus amples informations. Il en résulte une certaine discontinuité dans l'exposé. Que le lecteur nous en excuse.

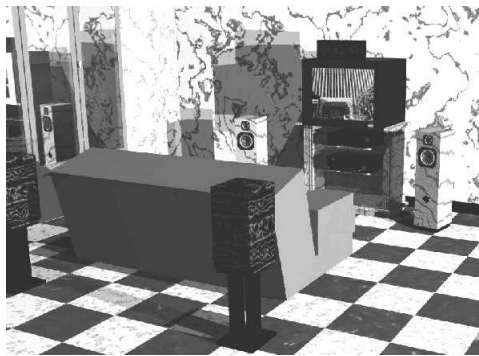
1. ACOUSTIQUE ET HAUTE-FIDÉLITÉ

1.1. Techniques de reproduction sonore. Les premiers enregistrements sonores datent du milieu du dix-neuvième siècle avec l'invention du phonographe par Thomas Edison. Pourtant la qualité de reproduction des différents supports employés reste très peu satisfaisante jusque dans les années quarante. La première réelle évolution provient de l'invention du microsillon en 1948. La seconde, et sûrement une des plus magistrales, est la *stéréophonie*. Ce procédé consiste à transcrire, non plus un signal sonore, mais deux, un gauche et un droit, de manière à restituer une sensation d'espace.

Il faut remarquer à ce sujet que la stéréophonie ne cadre qu'imparfaitement avec notre perception binaurale du son. En effet, nos oreilles enregistrent un signal provenant de toutes les directions, et le cerveau situe les différentes sources sonores grâce aux différences de perception entre les deux oreilles, de la même façon que nous voyons en relief grâce à nos deux yeux. La stéréophonie n'est donc qu'une approximation satisfaisante de notre écoute. D'autres systèmes ont été étudiés, par exemple la quadriphonie où l'auditeur est placé au centre d'un carré formé par quatre sources sonores. Cette technique très à la mode dans les années 70, fut abandonnée pour des raisons commerciales, mais l'idée d'utiliser plus de deux sources sonores revient aujourd'hui sous une forme beaucoup plus évoluée et surtout beaucoup plus réaliste, les processeurs d'ambiance comme le DSP 700 de Yamaha.

On ne se contente plus des deux signaux gauche et droit, mais on rajoute d'autres sources sonores dites de *présence* : une centrale entre les deux sources traditionnelles et deux à l'arrière (voir figure 1). Le processeur additionne un message d'ambiance distinct à chacun des canaux traditionnels et envoie dans ces satellites un message qui lui est propre. Ces signaux d'ambiance ont été obtenus par une simulation des échos et réverbérations du signal stéréophonique dans un milieu choisi par l'auditeur, par exemple une cathédrale, un auditorium, une salle de concert ou plus simplement une boîte de jazz. La simulation est réalisée à partir de nombreux paramètres relevés dans un environnement réel et numérisés. Ce système a un énorme avantage par rapport à la quadriphonie : il n'est plus nécessaire d'enregistrer quatre signaux, on se contente du signal stéréophonique obtenu avec n'importe quel appareil. De plus il s'avère que le résultat est très réaliste et le prix de ces appareils est devenu "abordable", il avoisine les 10 000 francs avec l'amplificateur.

FIGURE 1. Processeur d'ambiance sonore



Une autre grande évolution dans le stockage des informations audio fut l'enregistrement sur bandes magnétiques. Cette technique qui s'est très rapidement généralisée a permis d'améliorer considérablement la qualité des enregistrements (analogiques). Elle est toujours en vigueur et atteint aisément la qualité des enregistrements numériques, mais pas leur souplesse de traitement.

Les techniques d'enregistrement numérique datent du début des années 70 alors que l'idée de A. H. Reeves de numériser le signal audio (la *Pulse Code Modulation*)

date de 1937! Un des tout premiers enregistrements numériques (1974) fut japonais, l'intégrale des sonates de Mozart interprétées par M. J. Pires. Pour les européens ce fut le *Fidelio* de Beethoven par G. Solti.

La firme hollandaise Philips et la firme japonaise Sony étudièrent parallèlement dès 1974 la possibilité de stocker des informations numériques sur un support à lecture optique. Leurs recherches aboutirent sensiblement au même moment, au début des années 80. Pour éviter les problèmes commerciaux que connurent les magnétoscopes à cause des différents standards utilisés (Betamax, V2000, VHS), les deux sociétés s'associèrent pour créer un standard unique connu sous le nom de disque compact, ou CD pour les intimes.

La grande différence entre le disque compact et les autres supports n'est pas tant l'amélioration de la qualité sonore que la façon radicalement novatrice de gérer l'information. En effet les hautes performances du disque compact étaient déjà atteintes grâce aux bandes magnétiques, mais sur des appareils sophistiqués associés à des systèmes réducteurs de bruit très onéreux (Dolby pro, DBX etc.), donc hors de portée du grand public.

De plus ces performances ne sont réellement mises en valeur qu'avec un matériel idoine, que ce soit au niveau de l'amplification du signal ou de sa reconstitution physique par des haut-parleurs. Chaque paramètre du son est systématiquement aligné sur le plus mauvais de tous les maillons de la chaîne (bande passante, dynamique, rapport signal/bruit, séparation des canaux, linéarité, distorsion). Cela réserve donc les qualités réelles du disque compact aux amateurs "éclairés" ou fortunés.

Comme toutes les révolutions, celle du CD ne s'est pas faite sans mal, il fallait surmonter non seulement les formidables problèmes techniques, mais aussi la méfiance des audiophiles, toujours aussi difficiles à convaincre du bien fondé des évolutions technologiques. Comme pour l'avènement de la stéréophonie, longtemps décriée, les critiques furent nombreuses (et parfois justifiées), par exemple sur le son trop "métallique" du disque compact ou sur le manque de fluidité des phrases musicales.

1.2. Acoustique et performances du CD. Nous allons expliquer à quoi correspondent certaines mesures que l'on voit souvent dans les caractéristiques techniques des appareils de reproduction sonore. Pour cela il est nécessaire de rappeler quelques notions élémentaires d'acoustique (voir [10]).

Notre oreille est sensible aux ondes sonores, autrement dit aux effets alternés de dépression et de surpression de l'air qui nous entoure. On récupère ces variations de pression sous forme électrique à l'aide d'un microphone. Très schématiquement, une pastille sphérique est solidaire d'un aimant mobile à l'intérieur d'une bobine (voir figure 2). Cette pastille est sensible aux variations de pression acoustique, elle se déplace donc avec l'aimant sur l'axe de la bobine. On a ainsi un courant induit que l'on récupère aux bornes de la bobine. On peut alors caractériser un son par une courbe *amplitude/temps* (voir figure 3).

Une oreille en parfait état ne perçoit que les sons dont la fréquence est comprise entre 20Hz et 20 000Hz, mais l'étendue de cet intervalle décroît rapidement avec l'âge. On appelle souvent cet intervalle la *bande audio*. Le *la* du diapason oscille à une fréquence de 440Hz, on devrait donc obtenir une sinusoïde (voir la courbe supérieure

FIGURE 2. Microphone passif simplifié

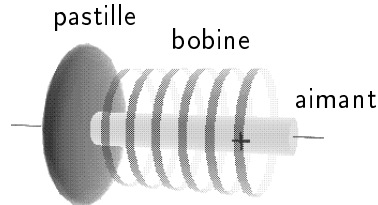
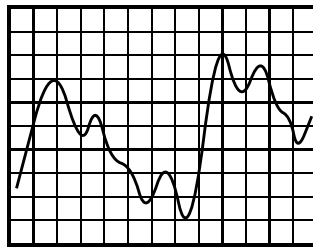


FIGURE 3. Représentation d'un signal acoustique



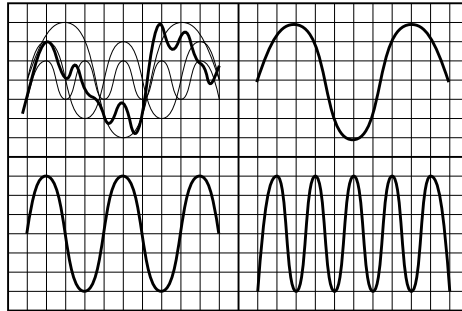
droite de la figure 4), pourtant c'est une courbe plus perturbée que l'on obtient (courbe supérieure gauche en gras de la figure 4). En fait il n'y a pas que le signal à 440Hz qui est émis. En plus de ce signal, dont la fréquence est appelée *fréquence fondamentale*, il existe toute une série de signaux dont la fréquence est un multiple de la fréquence fondamentale. Ces signaux sont appelés les *harmoniques*, et on précise le multiple de la fréquence fondamentale, ainsi la fréquence de l'harmonique 2 est égale à 2 fois la fréquence de la fondamentale (courbe inférieure gauche de la figure 4). L'écart entre deux harmoniques consécutives s'appelle une *octave*¹. L'amplitude de chaque harmonique dépend de l'instrument qui génère le son. On reçoit donc la somme de tous ces signaux avec leurs amplitudes respectives, ainsi la courbe du *la* est obtenue en additionnant les harmoniques à la fondamentale. Ces courbes et leur somme (en gras) sont représentées dans le cadre supérieur gauche de la figure 4.

La suite (le *spectre*) formée par les amplitudes des harmoniques successives d'un son détermine ce que l'on appelle le *timbre*, qui caractérise chaque instrument de musique. C'est pour cela que le *la* d'un piano est différent du *la* d'une flûte, pour la même fréquence fondamentale. Le signal du *la* 440 est donc la somme de la série (convergente) des harmoniques qui le compose, cette décomposition est appelée *décomposition en série de Fourier* du signal. Notre perception du son n'est pas proportionnelle à son intensité mais au logarithme en base 10 de cette intensité. Ainsi on utilise une unité plus pratique, le décibel (dB) :

$$(1) \quad 10 \cdot \log_{10}(I/I_0) \quad (\text{dB})$$

1. Ce mot provient du nombre de notes de la gamme majeure (do, ré, . . . ,do), et la fréquence du do le plus haut est égale à deux fois la fréquence du do le plus bas.

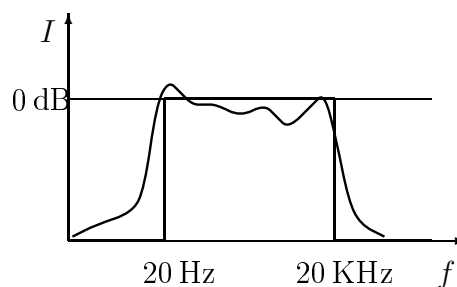
FIGURE 4. Décomposition en série de Fourier d'un signal acoustique



où I_0 désigne une intensité acoustique de référence correspondant au seuil de sensibilité de notre oreille. On peut maintenant décrire quelques paramètres importants en haute fidélité.

La réponse en fréquence : On peut mesurer sur un appareil de reproduction sonore (analogique ou numérique) les intensités des différentes fréquences de la bande audio qu'il restitue en sortie (fréquences de même intensité en entrée). Un appareil de haute fidélité ne devrait en aucun cas en privilégier certaines, ainsi la courbe *amplitude/fréquence* devrait ressembler à un plateau. Ce n'est jamais le cas, en fait on a généralement une courbe plus ou moins bosselée (figure 5) et on précise très souvent les écarts positifs et négatifs d'amplitude les plus importants par rapport à la moyenne. Le disque compact a une réponse en fréquence comprise entre 20Hz et 20 000Hz à $+0.5/ - 1$ dB.

FIGURE 5. Réponse en fréquence théorique et effective



Remarque 1. Parfois certains appareils comme les amplificateurs (haut de gamme) annoncent une réponse en fréquence comprise dans un intervalle englobant très largement la bande audio, par exemple de 2Hz à 100kHz. L'information hors de la bande audio n'est pas perçue par l'auditeur, par contre la courbe de réponse en fréquence sera plus lisse entre 20Hz et 20kHz car elle atteint le sommet du plateau bien avant

20Hz et ne redescend que bien après 20kHz, et les irrégularités sont principalement concentrées aux extrémités du spectre.

La dynamique : Correspond au rapport entre l'intensité maximale et minimale des sons que l'on peut reproduire. Avec 90dB, soit un rapport de 10^9 , le disque compact atteint la dynamique d'un orchestre symphonique dans une salle de bonne acoustique.

Le rapport signal sur bruit : Correspond au rapport entre l'intensité maximale que peut prendre le signal utile et le niveau du bruit de fond (c'est le souffle que l'on entend parfois). Encore une fois avec 90dB on atteint largement les conditions d'un concert classique.

Remarque 2. Le rapport signal sur bruit réel est malheureusement très souvent bien en deçà de la capacité théorique du disque compact. En effet, les ingénieurs du son effectuent souvent un mixage² trop travaillé, ne règlent pas correctement le niveau des micros, ou tout simplement enregistrent dans un environnement bruyant.

En fait la qualité moyenne des prises de son est exécrable. Il est à noter à ce sujet que l'on peut obtenir d'aussi bons résultats avec un enregistrement analogique qu'avec un enregistrement numérique. Les trois lettres (AAD, ADD OU DDD) qui indiquent de quelle manière ont été réalisés respectivement, l'enregistrement, le mixage et la gravure (la troisième est superflue, la gravure est toujours numérique!) *n'ont aucun rapport avec la qualité de l'enregistrement.*

On citera en référence de qualité, l'enregistrement analogique de *Dark Side Of The Moon* des Pink Floyd chez EMI en 1973 et numérique de *La Symphonie Fantastique* de Berlioz par Charles Dutoit chez DECCA en 1983.

La séparation des canaux : C'est un paramètre très important pour la qualité de "l'image" stéréophonique. La *diaphonie*, c'est-à-dire l'interférence entre les deux canaux gauche et droit, est inférieure à 90dB pour le disque compact, ce qui signifie que la proportion de signal gauche "débordant" sur le signal droit (ou réciproquement) est de 10^{-9} .

La distorsion harmonique : Cette mesure, exprimée en pourcentage, indique l'altération des courbes harmoniques composant le signal. Cela peut se produire entre autres, en cas de saturation pendant une prise de son, les sinusoïdes se transforment alors en signal carré. La distorsion harmonique est inférieure à 0.004% pour le disque compact.

La linéarité de phase : Se mesure en degré et caractérise le déphasage entre le signal théorique et réel. Notre oreille est quasiment insensible au déphasage d'un signal monophonique, par contre la stabilité de l'image stéréo, donc la sensation de profondeur, dépend très largement de ce paramètre. C'est un paramètre extrêmement

2. Lors d'un enregistrement, le nombre de signaux enregistrés peut varier de 1 à 64, comme il ne doit subsister que deux canaux, gauche et droit, ces différents signaux sont synchronisés puis mélangés (additionnés) dans des proportions variables après avoir subi ou non des modifications de timbre, de réverbération etc. C'est cette phase de l'enregistrement qu'on appelle mixage.

difficile à contrôler sur du matériel analogique, il est quasiment parfait sur le disque compact ($\pm 0.5^\circ$).

Le pleurage et le scintillement : Caractérisent en pourcentage d'erreur, respectivement, la déformation du son due à une vitesse de lecture trop lente ou trop rapide du signal. Ces défauts sont inexistantes sur le disque compact.

Il existe d'autres paramètres (temps de montée, distorsion d'intermodulation, etc.) mais ils sont moins significatifs. Pour certains d'entre eux on précise parfois si le calcul a été pondéré ou non. L'information la plus caractéristique dans un signal sonore est située en dessous de 3000Hz pour l'homme, ainsi toutes les fréquences n'ont pas la même importance, on introduit donc une pondération dans les calculs.

Remarque 3. La durée de vie d'un disque compact n'est pas illimitée comme on pourrait le croire. Des essais de vieillissement montrent qu'elle peut varier considérablement selon les conditions de stockage du disque. Une firme française a conçu un support beaucoup plus résistant et de bien meilleure qualité que le polycarbonate actuellement utilisé pour le pressage des CD, et dont la durée de vie est de l'ordre de 1000 ans, malheureusement son prix le réserve aux sociétés qui ont besoin d'un support d'archivage très stable.

Les avantages du disque compact sont nombreux par rapport aux supports traditionnels, on a donc regroupé dans le tableau 1, à titre comparatif, les valeurs moyennes de quelques paramètres des trois supports les plus courants, à savoir le disque analogique, la cassette audio et le disque compact.

TABLE 1. Caractéristiques comparées entre supports audio. (n.p. : non-pondéré. n.m. : non-mesurable)

Paramètres	33t	K7	CD
Dim/diam. (cm)	30	10 × 6 × 1	12
Durée lecture (mn)	40	90	75
Dynamique (dB)	70	70	>90
Rapport S/B (dB)	45	65 n.p.	>90 n.p.
Sép. canaux (dB)	30	50	>90
Rép. fréq. (Hz)	30-20.000	20-20.000	20-20.000
Dist. harm. (%)	1-2	<0.5	0.004
Pleur./scint. (%)	0.03	0.03	n.m.
Durée de vie	500H	variable	10-100 ans
Effet altérations	parasites	parasites	corrigibles

Aucune amélioration flagrante de qualité n'est à attendre au niveau de la source sonore avec la conception stéréophonique actuelle. Il est donc nécessaire pour la prochaine "révolution" de repenser au principe même de la transcription, soit en abandonnant la stéréophonie, soit, ce qui est plus vraisemblable, en développant les recherches sur les processeurs d'ambiance.

La légende veut que la durée de lecture du disque compact ait été déterminée après avoir consulté le chef d'orchestre H. V. Karajan. Il jugea qu'il fallait pouvoir

enregistrer la neuvième symphonie de Beethoven d'un seul tenant. On arrive ainsi à 75mn, bien que ses propres interprétations de cette symphonie n'aient jamais excédé 69mn. La version moins poétique est que le disque compact devait pouvoir tenir dans un autoradio, sa taille limitait donc la durée d'exécution.

Nous allons maintenant décrire les grandes lignes de la conversion analogique-numérique utilisée pour le disque compact.

1.3. La conversion analogique-numérique. Échantillonner un signal sonore consiste à ne retenir que certains points de la courbe *amplitude/temps*, pour minimiser la quantité d'information à stocker. Ces points peuvent être choisis de façon périodique, l'échantillonnage est alors uniforme, ou de toute autre manière. C'est le type de signal que l'on veut échantillonner qui va déterminer la manière de choisir ces échantillons. Le seul objectif est de pouvoir reconstituer le signal à partir des échantillons prélevés. Pour l'échantillonnage qui nous intéresse, on considère en fait toutes les fréquences comprises entre 0 et 20 000Hz.

Vocabulaire 4. Le filtrage d'un signal consiste à éliminer certaines de ses composantes spectrales, par exemple les fréquences supérieures à une fréquence f_{\max} . Dans ce cas précis on dira qu'on utilise un *filtre passe-bas*, et f_{\max} sera appelée la *fréquence de coupure* du filtre. On définit similairement un *filtre passe-haut*. Les fréquences supérieures (ou inférieures selon le filtre) à la fréquence f_{\max} (f_{\min}) ne sont pas éliminées brutalement, mais progressivement, à mesure qu'elles s'éloignent de la fréquence de coupure. On peut alors préciser la *pente* de la coupure, et on dira par exemple qu'un filtre passe-bas de fréquence de coupure 20kHz a une pente de 12dB par octave.

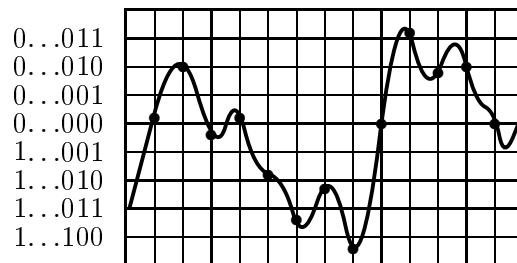
Le théorème de Shannon affirme qu'un signal peut être complètement défini à partir de ses échantillons. Dans le cas d'un signal dont le spectre est de type passe-bas, c'est-à-dire dont la bande de fréquence est comprise entre 0Hz et une fréquence maximale f_{\max} , le critère de Nyquist indique comment réaliser l'échantillonnage : les échantillons doivent être prélevés à intervalles réguliers T_e tel que $T_e \leq 1/(2f_{\max})$. Autrement dit, on peut recomposer le signal si la fréquence d'échantillonnage $f_e = 1/T_e$ est supérieure à deux fois la fréquence la plus haute contenue dans le signal.

Si la fréquence d'échantillonnage est inférieure à deux fois f_{\max} alors on ne peut récupérer le signal sans distorsion à cause du phénomène de repliement des spectres (voir [16]) lors de la transformation de Fourier inverse. On retrouve évidemment cette situation si l'on échantillonne un signal à une fréquence $f_e = 2f_{\max}$ et si son spectre s'étend au-delà de la fréquence maximale f_{\max} supposée. Il est donc essentiel de filtrer le message avec un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_{\max} . La fréquence d'échantillonnage du disque compact est de 44.1kHz.

Remarque 5. La fréquence d'échantillonnage du disque compact provient du standard PAL de la télévision : une image est constituée de 625 lignes dont 37 sont inutilisables, et chaque ligne peut porter trois échantillons audio sur 16 bits, on a donc $(625 - 37) \times 3 = 1764$ mots transmissibles par image. Il y a 25 images par seconde, on obtient alors $1764 \times 25 = 44\,100$ échantillons par seconde.

La numérisation du signal n'est pas pour autant achevée, en effet, ces échantillons sont à valeur dans un intervalle réel, il y a donc une infinité de représentations. Pour remédier à cela, on pourrait arrondir les réels sur un certain nombre de décimales, mais on ne procède pas de cette manière. C'est à ce moment qu'intervient la *Pulse Code Modulation* de Reeves : on discrétise l'intervalle réel en 2^n points équidistribués (on verra comment déterminer n), et on associe à chaque échantillon l'index du point le plus proche (figure 6). On *quantifie* donc chaque échantillon réel en un mot binaire de longueur n , la numérisation est alors achevée.

FIGURE 6. Echantillonnage uniforme d'un signal audio



Il faut bien mesurer la portée du théorème de Shannon³ : le signal est *entièrement* défini par les échantillons, il n'y a donc *aucune* perte d'information. Ce n'est pas le cas avec la quantification. L'erreur que l'on commet est appelée *bruit de quantification*. Ici la quantification est linéaire, on a donc à faire à un *bruit blanc*⁴. On peut à partir de là calculer le rapport *signal/bruit* à l'aide de la formule

$$(2) \quad S/B = 6.02n + 1.76 \quad (\text{dB})$$

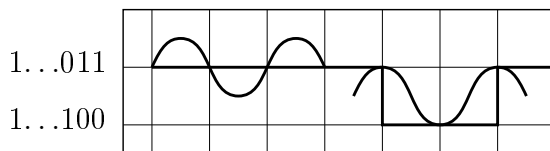
où n est la longueur d'un symbole (voir [6]). On obtient 98dB sur 16 bits et 86dB sur 14 bits.

La quantification a été fixée à 16 bits pour le disque compact, de manière à ce que le rapport *signal/bruit* atteigne celui d'une salle de concert avec une bonne acoustique. En fait ce rapport est un peu plus faible car on ajoute au signal un léger bruit blanc analogique, de manière à éliminer la distorsion harmonique (due au bruit de quantification) sur les signaux de faible amplitude. En effet si un signal oscille dans la même bande de quantification (i.e. entre deux lignes horizontales de la figure 6), selon le moment où l'on échantillonne, on obtiendra un signal continu ou carré (voir figure 7). C'est ce signal carré qui génère des harmoniques très aiguës, sources de distorsion. L'addition d'un bruit blanc analogique de faible amplitude élimine ce signal carré au prix d'une légère augmentation du bruit de fond.

3. En fait ce théorème avait déjà été démontré par Cauchy au 19ème siècle.

4. Un bruit est gaussien s'il admet en chaque moment une distribution normale des probabilités avec la même variance σ^2 . Si de plus sa densité spectrale est de puissance constante, on le qualifie de bruit blanc par analogie au rayonnement lumineux blanc qui vérifie cette condition.

FIGURE 7. Erreur de quantification sur un signal de faible amplitude



1.4. La conversion numérique-analogique. Pour la reconstitution du signal on dispose donc d'une séquence de mots binaires sur 16 bits qui représentent la courbe amplitude/temps du signal. Un convertisseur N/A classique crée un courant électrique proportionnel à la valeur entière d'un mot et garde ce courant constant jusqu'à ce que le mot suivant apparaisse. Le signal ainsi reconstitué est en escalier.

Les variations abruptes du courant sur les "marches" engendrent des hautes fréquences nettement supérieures à 20kHz, inaudibles mais très destructrices pour l'amplificateur et surtout les enceintes. Il faut donc filtrer ces fréquences. On place alors un filtre passe-bas analogique à la sortie du convertisseur.

Remarque 6. Si on observe le spectre du signal en escalier, il apparaît clairement que le filtrage est très délicat à réaliser. C'est pourquoi certains constructeurs comme Philips ont préféré réaliser un filtrage numérique avant la conversion. On procède alors à un suréchantillonnage du signal numérique qui convertit les mots de 16 bits à une fréquence de 44 100Hz en mots de n bits à une fréquence $m \times 44\ 100$ Hz. Pour Philips il s'agit d'un quadruple ($m = 4$) suréchantillonnage qui génère des mots de longueur 28. Certains constructeurs vont jusqu'à suréchantillonner 256 fois.

Le signal numérique étant beaucoup moins sensible aux perturbations que le signal analogique, on a tout intérêt à faire la conversion le plus tardivement possible, c'est-à-dire immédiatement avant l'amplification. C'est ce que font les amplificateurs "numériques".

Le signal numérisé provenant d'un lecteur CD ou de tout autre appareil audio-numérique (DAT, Tuner, etc.) est reçu via un câble coaxial ou une fibre optique dans l'amplificateur. Ce signal est ensuite préamplifié numériquement, et c'est juste avant l'étage d'amplification que l'on procède à la conversion N/A.

Cette technique tend à se généraliser car elle permet de réduire les coûts de fabrication des appareils, en effet, on élimine le (ou les) convertisseur(s) des sources audio-numériques au profit de celui (ceux) de l'amplificateur.

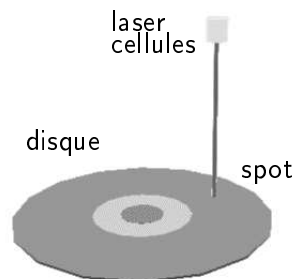
2. LE CODE D'ENREGISTREMENT EFM

2.1. Généralités. Nous avons vu au paragraphe précédent que la fréquence d'échantillonnage du disque compact était de 44 100Hz sur 16 bits pour chaque canal, il faut donc $44\ 100 \times 16 \times 2 = 1\ 411\ 200$ bits pour représenter une seconde de signal audio. On est encore très loin du nombre de bits qui seront réellement inscrits sur le disque. Nous allons décrire très brièvement les étapes que vont franchir les échantillons jusqu'à la gravure, puis nous exposerons en détail chacune de ces phases.

On segmente tout d'abord le flot binaire (*bit stream*) généré par la quantification, en paquets de 6 échantillons, appelés *trames*. On a donc $6 \times 16 \times 2 = 192$ bits dans chaque trame. On appellera désormais *symbole* une séquence de 8 bits, une trame contient donc 24 symboles. Chaque trame va subir un certain nombre de transformations, la première est nécessaire pour pouvoir corriger des erreurs éventuelles au moment de la reconstitution du signal. Elle est réalisée par un code CIRC (Cross Interleaved Reed-Solomon Code) dont le fonctionnement sera décrit en détail au paragraphe suivant. Très schématiquement, on ajoute tout d'abord 4 symboles de parité à la trame, puis on entrelace les 28 symboles, on ajoute à nouveau 4 symboles de parité, et on termine par un deuxième entrelacement. A cette étape une trame contient donc 32 symboles.

On ajoute un symbole contenant les informations nécessaires à l'affichage des durées appelé *Control & Display (C&D)*, et quelques bits inutilisés, qui pourront servir pour des applications futures. La trame comporte maintenant 33 symboles de huit bits et il n'y a *a priori* plus rien à ajouter au message pour l'inscrire sur le support. Pourtant le signal numérique va être modifié (plus précisément *modulé*) avant d'être inscrit sur le disque. Nous allons décrire maintenant le mécanisme de la lecture optique du disque par un faisceau laser, pour mettre en évidence les problèmes qui ont motivé le codage d'enregistrement EFM (Eight-to-Fourteen Modulation). Le

FIGURE 8. Lecture laser du disque

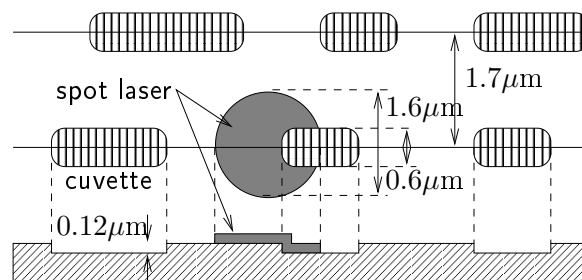


disque compact se présente, comme son nom le laisse entendre, sous la forme d'un disque de faible diamètre, 12cm exactement, et de 1.2mm d'épaisseur. Son poids est compris entre 14g et 33g et le diamètre du trou central est de 15mm (voir figure 8). L'information inscrite sur le disque se présente sous la forme de crêneaux constitués alternativement de bosses (*bumps*) et de plages lisses (*lands*), dont la longueur est comprise entre $0.9025\mu\text{m}$ et $3.307\mu\text{m}$, dont la largeur est de $0.6\mu\text{m}$ et la hauteur de $0.12\mu\text{m}$ (voir figure 9). Ces bosses et ces plages lisses existent en neuf longueurs distinctes, donc contrairement à certaines suppositions, le signal n'est pas codé selon un mode "tout ou rien". De la même manière que pour le sillon d'un disque analogique, le crêneau est enroulé en spirale entre un diamètre de 46mm et un diamètre de 117mm, mais la lecture se fait du centre vers les bords.

Pour fabriquer un disque compact, on grave sur un disque *maître (master)*, le crêneau "inverse" (un peu comme un négatif en photographie) de celui que l'on

trouvera ensuite sur un disque. Cette gravure est réalisée par le passage d'un spot laser sur le disque maître préalablement recouvert d'une couche photorésistive. Après développement et métallisation de la surface, on obtient des cuvettes (*pits*), donc en creux, et c'est ce disque qui servira à la fabrication en série des disques compacts moulés par injection de polycarbonate, puis métallisés, recouverts d'une couche de protection, découpés et enfin sérigraphiés.

FIGURE 9. Vue aérienne et en coupe du spot laser



La lecture se fait à l'aide d'un spot laser d'une longueur d'onde de départ de 780nm. Ce spot traverse un miroir sans tain, est focalisé par un système de lentilles et arrive au niveau de la surface embossée avec un diamètre de l'ordre de $1.6\mu\text{m}$. Sur les plages lisses, le rayon est réfléchi à 90% (la perte est due à la diffraction et aux matériaux) puis récupéré par un jeu de cellules réceptrices après réflexion sur le miroir. Dans le cas d'une bosse, la valeur est comprise entre 65 et 75%, et pas nulle comme on pourrait le penser.

Pour déterminer la durée de lecture d'un disque, on pourrait considérer qu'elle dépend de la longueur de la piste et de la densité d'information que l'on peut inscrire sur cette piste. Nous allons plutôt considérer qu'elle dépend de la longueur de la piste et de la vitesse de lecture v . Ce point de vue est strictement équivalent, si ce n'est qu'il fait intervenir v , et ce paramètre est essentiel dans ce qui va suivre. Cette vitesse linéaire v de balayage de la piste est *constante*, ainsi c'est la vitesse angulaire ω qui varie entre 150 et 530 tours/minute de manière à garder v constante.

Un autre paramètre essentiel dans tout ce qui va suivre est le diamètre d du spot laser. Il va déterminer la résolution du système, autrement dit sa capacité à distinguer des détails très petits sur le disque. Un des buts à atteindre pour la réalisation du système est évidemment de maximiser la durée de lecture en respectant les différentes contraintes physiques. Plus la vitesse de lecture est faible, i.e. plus la densité d'information est grande, plus cette durée sera importante. Nous allons montrer comment calculer cette vitesse, et surtout comment on peut la réduire à l'aide d'un codage approprié des symboles de la trame.

Il est important de signaler que de nombreux paramètres entrent en jeu dans cette détermination et qu'ils sont tous dépendants les uns des autres. Il est donc impossible de les décrire en séquence, ce qui complique sensiblement l'exposé. On peut tout d'abord déterminer très facilement la longueur de la piste. La largeur d'une cuvette est de $0.6\mu\text{m}$ et le diamètre du spot laser d'environ $1.6\mu\text{m}$. L'écartement

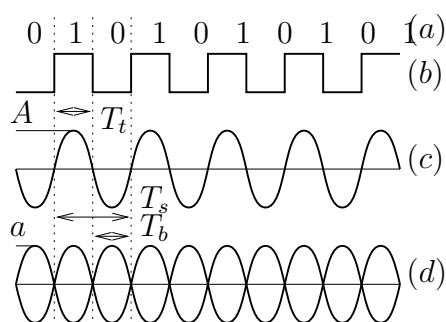
entre deux enroulements est donc au moins de la même valeur, soit $1.7\mu\text{m}$ (figure 9). On connaît la taille de la bande circulaire utile, entre 46mm et 117mm, et on obtient environ 5km de piste.

Pour déterminer la vitesse v , on va tout d'abord se placer dans une situation de référence où il n'y a pas de code d'enregistrement. Une bosse sera interprétée comme un 1 et une cuvette comme un zéro (ou vice-versa).

2.2. Un premier codage. Les résultats énoncés dans ce paragraphe sont largement inspirés de l'ouvrage de K. A. Schouhamer Immink, *Coding Techniques for Digital Recorders* [15].

La lecture par le spot laser de la piste engendre un courant à la sortie des cellules réceptrices. Les variations d'amplitude de ce courant sont obtenues à chaque transition ("mur"). On devrait donc récupérer un signal similaire aux créneaux. On obtient en fait un signal en forme de vagues dont la fréquence dépend de la fréquence f_t des transitions. La fréquence f_s la plus haute du signal est obtenue avec le symbole 10101010 (ou son complémentaire). Dans ce cas particulier on a exactement une sinusoïde de période T_s double de celle des transitions T_t . (figure 10 (c)). La fréquence d'horloge du lecteur étant synchronisée sur la fréquence du flot binaire f_b (dans ce cas particulier égale à f_t), on obtient, non pas une sinusoïde, mais la superposition des signaux générés par les transitions successives entre cuvettes et bosses. La courbe résultante en forme de losanges est appelée *diagramme de l'œil* (figure 10 (d)).

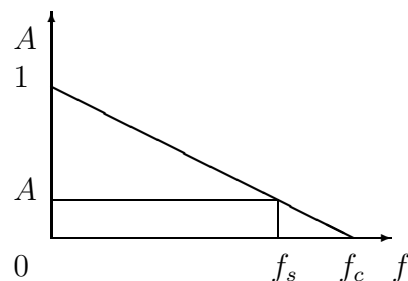
FIGURE 10. Enregistrement direct d'un symbole de 8 bits



Si le signal est suffisamment précis, il est toujours possible à chaque période T_b du signal de déterminer sur ce diagramme si le signal est positif ou non, et donc de reconstituer la séquence binaire associée. Le diagramme de l'œil peut-être perturbé par une mauvaise focalisation du spot laser, ou une surface abîmée. L'amplitude A du signal en sera donc affectée, et si elle devient trop faible, c'est-à-dire si elle est inférieure à un certain seuil appelé *seuil de décision*, on ne pourra plus reconstituer le message. On associe à cette valeur A la demi-hauteur de l'œil a . Dans la situation de référence actuelle $a = A$. L'amplitude A du signal dépend de la fréquence de transition f_t , donc de la vitesse de lecture v .

On a pu simuler à l'aide d'une analyse de Fourier la fonction $A(f_s)$ déterminant l'amplitude du signal, en fonction de sa fréquence f_s . Cette fonction dépend du diamètre d du spot laser et de la vitesse v . Ces deux paramètres définissent une fréquence de coupure f_c au delà de laquelle l'amplitude du signal capté est nulle. Cette fréquence est déterminée par la formule $f_c = v/d$ dans le cas d'une optique et d'une réception parfaites. La situation réelle sera naturellement moins favorable. La courbe de la fonction A est une droite passant par les points $(0, 1)$ et $(f_c, 0)$, où l'amplitude a été normalisée (figure 11). La pente de la droite dépend donc de la vitesse v . Pour une amplitude A fixée, on peut déterminer la fréquence de coupure f_c , de manière à ce que A soit l'image de la fréquence maximale f_s du signal.

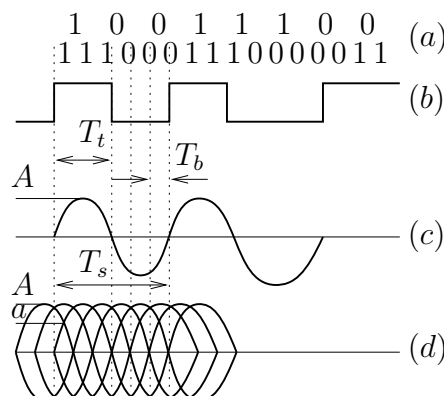
FIGURE 11. Courbe *amplitude/fréquence* du signal



Si A est faible on pourra sensiblement approcher f_c de f_s c'est-à-dire de $f_b/2$. La fréquence de transition la plus haute est déterminée par la période T_t associée (*minimum run length*), c'est-à-dire la longueur minimale entre deux transitions. Cette longueur dépend évidemment de la résolution du spot laser, donc de son diamètre. On va maintenant considérer une situation voisine du codage EFM qui va permettre de diminuer la vitesse v et ainsi d'augmenter la durée de lecture. On augmente la longueur minimale entre deux transitions d'un facteur de $3/2$ par rapport à la situation de référence ci-dessus, et on convertit les symboles de 8 bits en mots de 16 (modulation 8-16) de manière à ce que l'on trouve toujours au moins trois 0 ou trois 1 consécutifs (cette situation n'est pas très éloignée du codage EFM, voir figure 12). Ce codage est réalisé à l'aide d'une table de transcodage, et il y a bien sûr bijection entre les 256 symboles possibles et leurs codes. Une bosse peut désormais "porter" trois bits, et la fréquence du flot binaire est à présent différente de la fréquence de transition. On a $f_t = f_b/3$ et donc $f_s = f_t/2 = f_b/6$. Si on suppose qu'une faible demi-hauteur de l'œil est acceptable, la fréquence de coupure, donc la vitesse v , a été réduite d'un facteur de $3/2$ par rapport à la fréquence de coupure précédente. Ceci représente un gain de 50% de la durée de lecture. Ce codage s'est fait au prix d'une diminution de moitié de la demi-hauteur de l'œil, ceci n'est donc réalisable que si cette hauteur est acceptable.

Comme on peut l'imaginer, d'autres systèmes ont été testés, par exemple une modulation 8-24, mais il s'avère que la modulation 8-16 est le compromis le plus satisfaisant en situation réelle, en tenant compte du fait que la fréquence de coupure est de 20% inférieure à la valeur idéale de v/d . Ce codage est meilleur non seulement

FIGURE 12. Enregistrement d'un symbole après codage 8-16



en termes quantitatifs, mais aussi en termes qualitatifs. En effet, expérimentalement, la demi-hauteur de l'œil est moins sensible aux effets de défocalisation qu'avec les autres codes.

Nous allons voir qu'il y a d'autres contraintes à respecter pour la lecture du disque, et ceci va nous amener à considérer un codage d'enregistrement voisin du codage 8-16, le codage EFM.

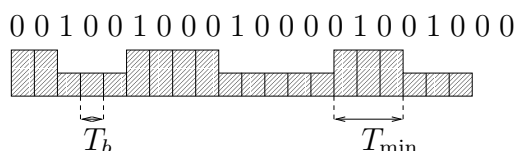
2.3. Le codage EFM. Nous avons vu avec le codage 8-16, que la cuvette (ou la bosse) la plus petite était de longueur $3 \times T_b$. Par contre la longueur la plus grande entre deux transitions n'avait aucune limitation. La longueur minimum effective est $T_{\min} = 0.9025\mu\text{m}$, c'est donc trois fois la période $T_b = 0.3008\mu\text{m}$. La réalisation d'un disque et d'un lecteur exige des tolérances de fabrication, entre autres, sur l'excentrage du trou central, le poids du disque, l'épaisseur du disque, le voile éventuel, la focalisation du spot laser, la position des "murs" de transition, la profondeur des cuvettes, etc., la liste est bien sûr loin d'être exhaustive.

Ainsi, la longueur des cuvettes et des bosses peut plus ou moins varier autour d'une longueur de référence. La fréquence d'horloge du lecteur sur laquelle est basé le "découpage" T_b de la piste n'est pas non plus d'une précision infinie, il en résulte une erreur de synchronisation à chaque impulsion. L'erreur commise peut se propager au fur et à mesure de la lecture, il faut alors synchroniser suffisamment souvent le lecteur de manière à ce que le nombre de bits lus ne soit pas erroné. Les différentes tolérances déterminent la longueur maximale (*maximum run length*) entre deux transitions, elle est de 11 fois la période T_b , i.e. $T_{\max} = 11 \times T_b$. L'horloge est synchronisée à chaque transition.

Il est indispensable qu'à toute position sur la piste on ne trouve jamais deux transitions éloignées de plus de $11 \times T_b$. Cette contrainte entraîne un codage approprié. La première différence entre le code EFM et le code 8-16 est la façon d'interpréter les bosses et les creux. Chaque transition est maintenant lue comme un 1 et la distance entre deux transitions détermine le nombre de zéros entre deux 1 (figure 13). Ceci ne change absolument rien à l'étude faite au paragraphe précédent. La première contrainte obtenue avec le codage 8-16, à savoir $T_{\min} = 3 \times T_b$, s'interprète

maintenant comme “au moins 2 zéros entre deux un”, et la contrainte précédente $T_{\max} = 11 \times T_b$ comme “au plus 10 zéros entre deux un”. On peut considérer que le

FIGURE 13. Interprétation des cuvettes et des bosses



flot binaire – le bit stream – est une suite binaire infinie, on donne alors la définition suivante :

Définition 1. On dit qu’une suite binaire $(u_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ suit la contrainte (d, k) ou encore que la suite est une (d, k) -séquence, si elle vérifie les deux conditions suivantes :

- i) contrainte d : tout mot extrait de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ ne contient jamais moins de d zéros consécutifs entre deux un ;
- ii) contrainte k : tout mot extrait de la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{Z}}$ ne contient jamais plus de k zéros consécutifs entre deux un.

Le problème qui se pose maintenant est de transformer le flot binaire en une $(2, 10)$ -séquence. En général pour résoudre ce type de problèmes, on cherche à construire un *transducteur* (automate d’états finis) réalisant le codage adéquat, mais dans le cas du disque compact ce n’est pas cette approche qui a été retenue car le flot binaire est segmenté en trames et on voulait transcoder successivement les symboles de la trame. On cherche donc une bijection de $\{0, 1\}^8 \rightarrow P \subset \{0, 1\}^n$ où n est à déterminer de manière à ce qu’il y ait suffisamment de mots dans $\{0, 1\}^n$ qui vérifient la contrainte $(2, 10)$ pour qu’on puisse en extraire une partie P de cardinal 256.

Un simple calcul de dénombrement montre que l’on peut construire 267 mots de longueur 14 vérifiant la contrainte $(2, 10)$. Il y a donc 11 mots supplémentaires. Une partie de la table de transcodage est donnée dans le tableau 2. Ce codage, s’il associe bien à un symbole un mot vérifiant la contrainte $(2, 10)$, ne permet pas de générer une $(2, 10)$ -séquence par concaténation des mots codés sur 14 bits. En effet, les mots 01000100000000 et 00000001000010 vérifient bien la contrainte $(2, 10)$, mais leur concaténation donne :

$$01001 \overbrace{0000000000000000}^{16 \text{ zéros}} 1000010$$

Il y a 16 zéros consécutifs, ce qui est interdit. Pour pallier ce problème on va intercaler 3 bits qui vont servir à lier les mots entre eux, il faut donc mémoriser deux symboles avant de les inscrire. Parmi les 8 mots de liaison possibles, seuls 4 sont autorisés : 000, 100, 010, 001. Pour l’exemple ci-dessus, on pourrait lier les deux mots par 100, 010, ou 001.

Parmi les 11 mots qui ne serviront pas à coder les symboles, on a éliminé tous ceux qui présentaient une longue séquence de zéros en début ou en fin de mot.

TABLE 2. Extrait de la table de codage EFM

<i>Index</i>	<i>Symbole (8 bits)</i>	<i>Code (14 bits)</i>
100	01100100	01000100100010
101	01100101	00000000100010
102	01100110	01000000100010
103	01100111	00100100100010
104	01101000	01001001000010
105	01101001	10000001000010
106	01101010	10010001000010
107	01101011	10001001000010
108	01101100	01000001000010
109	01101101	00000001000010

En effet, même avec trois bits de liaison, on ne peut lier deux mots comportant respectivement 10 zéros en fin et en début de mot. C'est ainsi que l'on a écarté les 4 mots comportant 10 zéros en début ou en fin de séquence, et les 6 mots en comportant 9. Le circuit de décodage, autrement dit le choix de la bijection, a été optimisé sur ordinateur de manière à être réalisé avec le nombre minimum de portes logiques. C'est de cette manière que l'on a écarté le onzième mot.

On remarque aisément qu'avec les 256 mots choisis pour le codage on aurait pu se contenter de 2 bits de liaison. Le troisième bit, *a priori* superflu, donne plus de liberté dans le choix de la liaison. Ceci va être déterminant pour minimiser un phénomène très gênant pour la lecture du disque. Les servo-systèmes qui gèrent le suivi de la piste sont contrôlés par des signaux à basses fréquences, or le signal de sortie contient lui aussi des basses fréquences (celles présentes dans le diagramme de l'œil), il peut donc y avoir des interférences. D'autre part, nous avons vu que dans le cas d'un disque sale ou présentant des empreintes de doigts, l'amplitude du signal peut décroître sous le seuil de décision. Il s'avère que ce phénomène est en partie minimisé en filtrant les basses fréquences. Ceci n'est évidemment possible que dans le cas où le signal ne contient pas d'information à ces fréquences. Il est cependant impossible de filtrer toutes les composantes en basse fréquence sans perdre de l'information. Le filtre passe-haut doit donc être un juste compromis entre ces deux phénomènes contradictoires. Nous avons vu que le diagramme de l'œil était la superposition de tous les signaux successifs générés par les différentes transitions sur la piste.

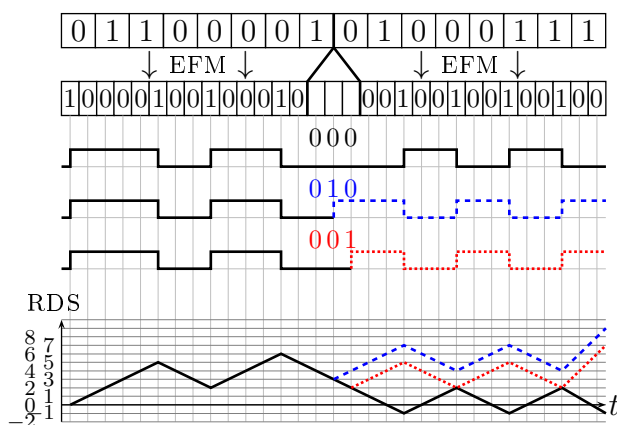
On peut mesurer le contenu en basses fréquences du signal à l'aide d'un paramètre appelé RDS (*Run Digital Sum*), ou *somme digitale courante*. Il s'agit de la différence entre la longueur cumulée des cuvettes, et la longueur cumulée des bosses, où l'unité de longueur est la période du signal binaire T_b . On peut donc diminuer les composantes en basses fréquences en essayant de ramener la RDS⁵ au voisinage de 0. C'est pour cela que l'on se donne trois bits de liaison, et on choisit parmi les

5. Ne pas confondre avec l'autre RDS qui a pour but de ramener les différences cumulées des recettes et des pertes de la sécu à zéro!

liaisons possibles, celle qui minimisera la valeur absolue de la RDS en ne considérant qu'un symbole "en avant" du symbole courant.

L'exemple de la figure 14 montre pourquoi ce sont les trois bits 000 qui ont été choisis pour la liaison des codes 10000100100010 et 00100100100100 correspondant respectivement aux symboles 01100001 et 01000111. Dans le système du disque compact, l'application de cette technique entraîne une diminution du bruit d'environ 10 décibels dans la bande de fréquence des servos-systèmes (0 à 20kHz).

FIGURE 14. Stratégie de minimisation de la RDS sur les 3 bits de liaison.



Il reste un dernier problème à résoudre, celui de la synchronisation, non plus de la fréquence d'horloge, mais du décodage du signal sur la piste. En effet, si les symboles des trames successives étaient inscrits à la suite, après le codage EFM et l'adjonction des trois bits de liaison, le moindre saut de piste empêcherait de retrouver où commencer l'interprétation d'un mot. On remédie à cela en inscrivant sur le disque une séquence de synchronisation répétée à intervalles réguliers. Cette séquence est justement construite à partir d'un des onze mots que l'on avait rejeté parmi les 267 mots possibles du code EFM. La séquence est :

$$1 \overbrace{0000000000}^{10 \text{ zéros}} 1 \overbrace{0000000000}^{10 \text{ zéros}} xyztu$$

On répète donc deux fois la séquence composée d'un 1 suivi de 10 zéros, et *xyztu* désignent les cinq bits nécessaires à minimiser la RDS, déterminés de la même façon que pour l'exemple précédent. Cette séquence est placée au début de chaque trame de 33 symboles. En fait la longueur des trames a été déterminée de manière à ce que la synchronisation puisse se faire suffisamment souvent.

On peut maintenant conclure en déterminant le nombre d'informations finalement inscrites sur le disque. On était parti d'une trame de 24 symboles, c'est-à-dire 6 échantillons de 32 bits, et on a ajouté après le codage correcteur, 8 symboles de parité et un symbole de contrôle C&D. La trame contient donc 33 symboles, et chacun de ses symboles est codé à l'enregistrement sur 14 bits par le codage EFM. On ajoute entre deux mots de 14 bits, 3 bits de liaison, et pour chaque trame, autrement dit tout les 33 symboles, on inscrit 27 bits de synchronisation. On a

donc pour 192 bits d'information audio-numérique, un codage final comportant 588 bits ($33 \times (14 + 3) + 27$). Une trame correspondant à 6 échantillons, il faut donc $588 \times 44\,100/6 = 4\,321\,800$ bits pour une seconde de musique, soit 3 fois plus que ce qui était nécessaire pour la quantification.

Remarque 7. On peut améliorer la minimisation de la RDS en considérant plus d'un symbole après le symbole courant, mais cela n'a pas été implanté sur le disque compact.

Nous allons donner à titre indicatif un code d'enregistrement beaucoup plus performant que le code EFM sur la plupart des critères requis par le disque compact.

2.4. Le code (2, 7) de P. A. Franaszek. Pour l'enregistrement sur disque des fichiers informatiques (IBM 3370/3380), P. A. Franaszek a conçu un code particulier où la segmentation de la suite binaire d'entrée n'est pas à longueur fixe (8 bits pour le codage EFM), mais à longueur variable (tableau 3).

TABLE 3. Code (2, 7) de Franaszek ($a = 01$, $b = 10$, $c = 00$)

<i>Entrée</i>	<i>Sortie</i>	<i>Sortie</i>
10	<i>ac</i>	0100
11	<i>bc</i>	1000
011	<i>cbc</i>	001000
010	<i>bac</i>	100100
000	<i>cac</i>	000100
0011	<i>ccbc</i>	00001000
0010	<i>cbac</i>	00100100

Exemple 8. Le mot 1001101011 est codé :

<i>Entrée</i>	10	011	010	11
<i>Sortie</i>	<i>ac</i>	<i>cbc</i>	<i>bac</i>	<i>bc</i>

Ce code génère des (2, 7)-séquences à partir d'une suite binaire quelconque. La contrainte (2, 10) du disque compact est donc largement vérifiée, et ce code permettrait de synchroniser plus fréquemment l'horloge du lecteur. Un autre avantage non négligeable est le circuit de décodage extrêmement simple, il suffit d'un registre à décalage sur 8 bits, avec un décalage de deux, synchronisé sur la période du canal binaire. A chaque cycle, le bit de sortie b est calculé à l'aide de l'expression booléenne

$$(3) \quad b = x_4.\overline{x_1} + x_7.\overline{x_5}.x_2 + x_3.x_8 + x_6$$

où x_i , $i \in \{1, \dots, 8\}$ désigne le i -ème bit du registre. Le circuit est donc réalisé par un nombre très restreint de portes logiques. L'expression booléenne (3) montre que la propagation d'une erreur sur un bit en entrée est limitée à quatre bits en sortie.

Nous avons vu que le codage EFM nécessitait une synchronisation à chaque trame pour déterminer où commencer l'interprétation. Le code de Franaszek permet de corriger automatiquement une erreur de synchronisation éventuelle. Regardons l'exemple suivant : le mot 1011010011 est codé

<i>Entrée</i>	10	11	010	011
<i>Sortie</i>	<i>ac</i>	<i>bc</i>	<i>bac</i>	<i>cbc</i>

La segmentation des deux suites est primordiale pour le codage et le décodage. Nous allons voir que l'on peut commencer l'interprétation de la (2, 7)-séquence au mauvais moment et "retomber sur nos pieds". Imaginons que l'on commence le décodage à partir de la deuxième lettre, le tableau suivant nous indique la segmentation et le décodage. On a alors

<i>Entrée</i>	<i>cbc</i>	<i>bac</i>	<i>cbc</i>
<i>Sortie</i>	011	010	011

On retrouve la bonne position, dans ce cas précis, dès la deuxième interprétation. On peut montrer que cette propriété est vérifiée dans n'importe quel cas de figure. Ainsi, si le code de Franaszek était implanté dans le système du disque compact, on éviterait les 27 bits de synchronisation.

La contrainte $k = 7$ qui permettrait de synchroniser plus souvent l'horloge du lecteur, pourrait aussi minimiser les conséquences d'un phénomène optique très gênant. Le faisceau laser arrive perpendiculairement à la surface du disque, traverse le polycarbonate, et se focalise progressivement pour atteindre un diamètre de $1.6\mu\text{m}$ au niveau de la piste. L'indice de réfraction du polycarbonate étant de 1.55 contre 1 pour l'air, la longueur d'onde du spot laser passe de 800nm à 500nm environ. Si le disque est voilé, même très faiblement, la direction du faisceau est modifiée de manière sensible, de la même façon que pour un bâton que l'on enfonce dans l'eau. Les conséquences de ce phénomène sont dramatiques, les bosses n'ont plus la même longueur apparente, et cela introduit des erreurs d'interprétation. Des mesures montrent qu'une erreur d'inclinaison aussi faible que 0.6 degré suffit à multiplier par 100 voire par 1000 les erreurs de lecture ! Ces erreurs d'interprétation se font plus souvent sur des bosses ou des cuvettes de grande longueur, c'est pour cela que le code de Franaszek, qui limite la longueur à 8 périodes, pourrait réduire légèrement ce phénomène.

En conclusion, non seulement le code de Franaszek est meilleur sur de nombreux critères, mais en plus il permettrait d'augmenter la durée de lecture. On coderait directement le flot binaire provenant du codage correcteur, le rendement du code d'enregistrement étant de 1/2, il faudrait donc $16 \times 33 = 528$ bits pour une trame. Cela représente un gain de 8 minutes par rapport au codage EFM. Le seul défaut de ce code c'est qu'il ne permet pas de minimiser la RDS, donc de contrôler les basses fréquences du signal. Au regard de ses excellentes propriétés, il faut croire que la contrainte de minimisation de la RDS est essentielle pour le bon fonctionnement du système.

Remarque 9. Le faisceau laser est aussi réfléchi par les bords du disque, particulièrement sur ceux des disques récents, perpendiculaires au plan du disque, alors que les premiers étaient arrondis. Cela entraîne un parasitage lumineux qui peut se corriger à l'aide d'un traitement adéquat des bords du disque. Il suffit de passer un feutre indélébile vert *Lumocolor 357 Staedler* (voir [8]).

On peut constater une amélioration sensible de la qualité d'écoute en superposant deux disques, le disque supérieur faisant office de palet presseur stabilisateur par effet de coussin d'air. Ceci permet de diminuer le voile éventuel du disque lu et de réduire les vibrations.

3. LE CODE CORRECTEUR CIRC

3.1. Nécessité de la correction des erreurs. Dans tout système qui manipule de l'information, il est techniquement impossible, sans technique de codage, d'éviter qu'une information ne soit modifiée par des phénomènes d'origines diverses, mécaniques, électriques, électromagnétiques etc. On imagine sans peine que certaines situations exigent une intégrité absolue des données, et on en arrive parfois à considérer des situations surréalistes. Par exemple, pour les ordinateurs, aussi simples soient-ils, on a très sérieusement étudié les perturbations que pouvaient engendrer les particules cosmiques ! C'est une des raisons qui ont motivé l'adjonction d'un bit de parité sur les mots de 7 bits du code ascii (aujourd'hui ce n'est plus le cas, ce huitième bit est utilisé pour coder 128 nouveaux caractères dans le code ascii dit étendu).

La nature des erreurs dépend du mode de fonctionnement du système et le disque compact n'échappe pas à cette règle. Nous avons vu qu'après la conversion analogique/numérique, l'information était représentée par une séquence d'échantillons binaires codés sur 16 bits. Imaginons qu'un bit d'un échantillon soit altéré. De la même manière qu'un grain de sable peut bloquer tout un rouage, ce bit erroné peut anéantir tous les efforts consacrés à la qualité de reproduction.

L'échantillon de la courbe *amplitude/temps* (figure 6) est associé à un entier relatif, d'autant plus grand que le point est "haut" (ou bas). Supposons que cette valeur soit 13835. Sa représentation binaire sur 16 bits donne 00110110 00001011. Il est évident que si le 16-ème bit (à droite) est 0 au lieu de 1, l'erreur est négligeable, le point associé ne sera décalé que d'une bande d'échantillonnage. Par contre, si c'est le premier bit qui est faux, on a une discontinuité énorme par rapport à la courbe originale, et la reconstitution du signal en est fortement affectée.

Ce problème n'est pas propre au disque compact, mais la densité d'information qu'autorise le support rend le problème d'autant plus aigu. On peut très facilement estimer la quantité de bits qui peuvent être altérés par une rayure sur la surface du disque. Un calcul rapide nous montre qu'une simple rayure de l'ordre d'un millimètre suffit à détruire environ 3300 bits d'information sur la piste ! Il ne s'agit là que des rayures, et il existe malheureusement bien d'autres sources d'erreurs à considérer, les poussières, le voile du disque, les interférences, ou tout simplement des défauts de métallisation de la surface (que l'on peut facilement apercevoir à l'œil nu en regardant le disque en contre-jour).

Nous allons voir que le code CIRC (*Cross Interleaved Reed-Solomon Code*) utilisé dans le système du disque compact permet de corriger⁶ totalement 3 840 bits effacés, et même jusqu'à 12 288 bits par interpolation.

3.2. Codes raccourcis, codes démultipliés. On supposera connues les notions fondamentales de la théorie des codes correcteurs et des corps finis. Le lecteur pourra consulter [11, 1] pour les codes et [12, 3] pour les corps finis.

Dans tout ce qui va suivre, \mathbf{F}_q désigne le corps à q éléments, \mathbf{N} l'ensemble des entiers naturels et d la distance de Hamming. Pour un code C , on désigne par n sa longueur, k sa dimension, e sa capacité de correction, et d sa distance minimale (aucune confusion n'est à craindre avec la distance de Hamming).

Proposition 2. *Soit C un code linéaire (n, k) systématique sur \mathbf{F}_q et soit C' l'ensemble des mots de C dont les t premières composantes sont nulles ($t \leq k$). Alors, l'ensemble C'' des mots de C' dont on "élimine" les t premières composantes est un code $(n - t, k - t)$ appelé code raccourci du code C .*

Preuve. Notons M la matrice génératrice normalisée du code C et considérons l'ensemble C' des mots de C dont les t premières composantes sont nulles. Tout mot x du code C peut s'écrire sous la forme :

$$x = (\langle \lambda, c_1 \rangle, \langle \lambda, c_2 \rangle, \dots, \langle \lambda, c_n \rangle)$$

où c_i est la i -ème colonne de la matrice génératrice de C , où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire usuel sur \mathbf{F}_q^k et λ est un vecteur de \mathbf{F}_q^k . C' est donc l'espace orthogonal aux t premiers vecteurs colonnes de la matrice génératrice de C , c'est-à-dire :

$$C' = \{c_1, c_2, \dots, c_t\}^\perp$$

Les t premières colonnes formant la matrice identité de rang k , la dimension de C' est donc exactement $n - t$. On achève la démonstration en considérant la projection de C' sur \mathbf{F}_q^{n-t} qui ne conserve que les $n - t$ autres composantes. \square

Le résultat qui suit est essentiel et va mettre en évidence l'intérêt des codes linéaires raccourcis.

Proposition 3. *Soit C un code linéaire (n, k) sur \mathbf{F}_q et C'' le code raccourci de C de paramètres $(n - t, k - t)$ pour $t \leq k$. Si d est la distance minimale de C et d'' celle de C'' alors $d'' \geq d$.*

Preuve. On sait que la distance minimale d du code C est le poids minimum w des mots de C . En reprenant les notations de la proposition précédente il est clair que le poids minimum w' de C' est nécessairement au moins égal à w . On ne modifie pas le poids des mots de C' en éliminant les t premières composantes puisqu'elles sont nulles, donc $w'' = w' \geq w$ ce qui achève la démonstration. \square

Les codes linéaires que l'on sait bien manipuler ne permettent pas de choisir tous les paramètres essentiels, à savoir distance minimale, dimension et longueur ; en général deux des paramètres fixent le troisième. Cette "règle" ne change évidemment pas pour les codes raccourcis si ce n'est que l'on peut construire k codes raccourcis

6. pour des effacements contigus.

distincts du code initial à partir d'un même code linéaire (n, k) , on a donc à notre disposition non plus 1 mais $k + 1$ codes (bien que le code nul ne soit pas d'un grand intérêt). De plus la proposition 3 laisse entendre qu'il est parfois possible d'améliorer la capacité de correction en choisissant correctement le code raccourci. L'exemple qui suit nous en donne la preuve :

Exemple 10. Considérons la matrice génératrice G d'un code $(5, 2)$ sur \mathbf{F}_2 suivante :

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \{(0, 0, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 1, 1), (1, 0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, 1, 1)\}$$

La distance minimale de C est $d = 2$ et si on considère le code raccourci de C obtenu en prenant le vecteur nul et $(0, 1, 1, 1, 1)$ et en éliminant la première composante, on trouve bien un code linéaire $C'' = \{(0, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ de distance minimale $d'' = 4$, de longueur $4 = 5 - 1$ et de dimension $1 = 2 - 1$.

Proposition 4. *Un code C (quelconque) de longueur n sur un alphabet A de distance minimale d permet de détecter $d - 1$ erreurs et d'en corriger $\lfloor (d - 1)/2 \rfloor$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.*

Preuve. Si un mot reçu n'appartient pas à C , on est sûr qu'il y a eu une erreur. De plus, il est clair que pour tout mot c de C , la boule fermée $B(c, d - 1)$ ne contient aucun autre mot du code que c . Ainsi, s'il y a moins de $d - 1$ erreurs on est sûr de la détecter. Si la distance minimale est d , le plus grand rayon r pour lequel les boules de rayon r centrées sur les mots du code sont disjointes deux à deux est $\lfloor (d - 1)/2 \rfloor$. Ainsi si un mot présente moins de $\lfloor (d - 1)/2 \rfloor$ erreurs, il n'y a qu'un mot du code qui lui est associé. \square

Remarque 11. On peut généraliser ce résultat. Supposons que le code est e -correcteur ($e = \lfloor (d - 1)/2 \rfloor$) mais n'est utilisé que pour corriger e' erreurs avec $e' < e$. Si une erreur sur un mot c du code ne le "déplace" pas dans une boule de rayon e' centrée sur un autre mot du code, alors cette erreur est détectée. Le nombre d'erreurs détectables est donc donné par le poids maximum du mot erreur, soit $d - (e' + 1)$. Ce résultat sera utilisé pour le disque compact.

Si on considère un code linéaire $C(n, k)$ sur le corps \mathbf{F}_{p^m} avec p premier, chaque symbole de \mathbf{F}_{p^m} peut s'écrire comme un mot de \mathbf{F}_p^m . En effet, on peut décomposer ce symbole dans une base de \mathbf{F}_{p^m} considéré comme un \mathbf{F}_p -espace vectoriel, par exemple dans la base $(1, \alpha, \dots, \alpha^{m-1})$ où α est un élément primitif de \mathbf{F}_{p^m} .

Définition 5. *L'isomorphisme $d: \mathbf{F}_{p^m}^n \rightarrow \mathbf{F}_p^{mn}$ défini par*

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{1,m}, x_{2,1}, \dots, x_{n,m})$$

où $x_i = x_{i,1}e_1 + \dots + x_{i,m}e_m$ dans une \mathbf{F}_p -base (e_1, \dots, e_m) de \mathbf{F}_{p^m} , est appelé démultiplication. L'isomorphisme d^{-1} est appelé contraction.

Proposition 6. *Soit C un code linéaire (n, k) sur \mathbf{F}_{p^m} alors le démultiplié du code C est un code linéaire de paramètres (nm, km) sur \mathbf{F}_p .*

Preuve. Immédiate. □

Si d est la distance minimale du code C , qu'en est-il de la distance minimale du code démultiplié ? Nous allons plutôt nous intéresser à la capacité de correction du démultiplié pour les paquets d'erreurs. Le lecteur pourra consulter [14] pour la distance minimale du démultiplié d'un code.

3.3. Effacements, paquets d'erreurs. Comme le laissait entendre l'introduction, les erreurs les plus fréquentes sur le disque compact sont dues à des rayures. Cela entraîne des erreurs consécutives sur le canal binaire. On parlera alors de *paquets d'erreurs* et nous allons voir qu'on peut augmenter sensiblement la capacité de correction pour ce type d'erreurs.

Dans certaines situations, il est possible que le système ne sache pas interpréter une information, par exemple on ne peut décider s'il s'agit d'un 0 ou d'un 1. Dans ce cas on est en présence de ce que l'on appelle un *effacement*. Il y a une différence entre une erreur et un effacement, une erreur correspond à un symbole faux, tandis que pour un effacement, on ne sait pas quel symbole interpréter. Cela signifie que la position de l'effacement est connue et cette indication *a priori* va permettre de "corriger" plus d'effacements que d'erreurs.

Pour le disque compact, il faudra considérer simultanément les deux situations, erreurs et effacements.

Proposition 7. *Le code démultiplié d'un code linéaire $C(n, k, d)$ sur \mathbf{F}_p^m permet de corriger des paquets d'erreurs de longueur au plus $m(\lfloor (d-1)/2 \rfloor - 1) + 1$.*

Preuve. Il est clair qu'un paquet d'erreurs de longueur l sur un mot du code démultiplié ne doit pas affecter plus de $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ symboles du mot contracté. Si l symboles consécutifs d'un mot c de C sont altérés ($l \leq \lfloor (d-1)/2 \rfloor$), il y aura au plus $m\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ symboles altérés sur son démultiplié. La réciproque est fautive, le plus grand paquet d'erreurs sur le démultiplié de c affectant au plus $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ symboles de c est

$$m\left(\left\lfloor \frac{d-1}{2} \right\rfloor - 1\right) + 1$$

On vérifie aisément qu'un mot u de \mathbf{F}_p^{mn} ne peut provenir que d'un seul mot du code démultiplié pour un paquet d'erreur de longueur $m(\lfloor (d-1)/2 \rfloor - 1) + 1$. □

L'exemple suivant est plus parlant : soit $c = (c_1, \dots, c_7)$ un mot d'un code linéaire C de longueur 7, de dimension 3 et de distance minimale 5 (corrigeant donc 2 erreurs).

c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7
$c_1^1 c_1^2 c_1^3$	$c_2^1 c_2^2 c_2^3$	$c_3^1 c_3^2 c_3^3$	$c_4^1 c_4^2 c_4^3$	$c_5^1 c_5^2 c_5^3$	$c_6^1 c_6^2 c_6^3$	$c_7^1 c_7^2 c_7^3$

On voit bien que si la longueur d'un paquet d'erreurs excède $4 = 3(2-1) + 1$ il peut y avoir plus de 2 symboles erronés dans le mot c .

Remarque 12. Dans certaines situations, le code démultiplié peut corriger $m\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ erreurs sur un mot du code démultiplié, justement quand ces erreurs n'affectent que $\lfloor (d-1)/2 \rfloor$ symboles du mot contracté.

Proposition 8. *Un code C (quelconque) de longueur n et de distance minimale d sur un alphabet A peut corriger $d - 1$ effacements.*

Preuve. Soient c_1 et c_2 deux mots du code C . La distance minimale étant d , il y a donc au moins d symboles distincts entre c_1 et c_2 . Pour confondre c_1 et c_2 il faut donc effacer au moins ces d symboles. Autrement dit pour tout mot comportant au plus $d - 1$ effacements, il ne peut provenir que d'un unique mot du code C . \square

Proposition 9. *Un code C (quelconque) de longueur n et de distance minimale $d = 2t + u + 1$ sur un alphabet A peut corriger t erreurs et u effacements.*

Preuve. Notons r le mot erroné avec e erreurs ($e \leq t$) et comportant l effacements ($l \leq u$). Notons S l'ensemble des mots de A^n identiques à r sur les $n - l$ composantes non-effacées. On voudrait qu'il n'y ait qu'un seul mot c du code à une distance inférieure à t de l'ensemble S pour que le code corrige les e erreurs. Supposons le contraire. Alors il existe deux mots c_1 et c_2 du code C et deux éléments s_1 et s_2 de S tels que :

$$d(c_1, s_1) \leq t \quad \text{et} \quad d(c_2, s_2) \leq t$$

On sait que $d(s_1, s_2) \leq u \quad \forall s_1, s_2 \in S$ d'où

$$d(c_1, s_1) + d(s_1, s_2) + d(c_2, s_2) \leq t + u + t$$

et l'inégalité triangulaire nous donne

$$(4) \quad d(c_1, c_2) \leq 2t + u$$

Il suffit alors que $d = 2t + u + 1$ pour que (4) entraîne $c_1 = c_2$. \square

3.4. Entrelacements. Pour augmenter la capacité de correction des codes pour les paquets d'erreurs, on utilise une technique dite d'entrelacement. Le principe est simple, au lieu de transmettre directement des mots du code, on transmet le premier symbole de chacun des mots, puis le deuxième etc. Considérons l'exemple suivant pour illustrer la construction :

Soit C le code linéaire $(7, 4)$ de distance minimale $d = 3$ sur \mathbf{F}_2 de matrice génératrice

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Soient $c_1 = (1, 1, 0, 0, 0, 0, 1)$, $c_2 = (0, 0, 1, 1, 1, 1, 0)$ et $c_3 = (0, 1, 1, 1, 0, 0, 0)$ trois mots du code. Le code permet de corriger au plus une erreur sur chacun de ces mots. Supposons que l'on veuille transmettre ces trois mots dans cet ordre. Considérons la matrice dont les lignes sont c_1, c_2 et c_3 :

$$\begin{matrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{0} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 \end{matrix}$$

Si on transmet maintenant les colonnes successives de cette matrice, c'est-à-dire la séquence

1001010110**110**10010100

alors on dit que les trois mots ont été *entrelacés*. La conséquence de cet entrelacement est qu'un paquet d'erreurs de longueur au plus 3 (symboles en gras) sur cette séquence engendre au plus 1 erreur sur chacun des 3 mots.

Si on considère un code linéaire $C(n, k)$ sur un corps \mathbf{K} et un entier t , on montre aisément que l'ensemble formé par tous les entrelacements de t mots du code C est un code de longueur nt , de dimension kt sur le corps \mathbf{K} permettant de corriger des paquets d'erreurs de longueur lt si le code C corrige des paquets d'erreurs de longueur l .

Définition 10. Soit $C(n, k)$ un code linéaire sur un corps \mathbf{K} . Le code obtenu par entrelacement de t mots du code C est appelé code entrelacé de profondeur t du code C .

Nous allons voir maintenant une technique d'entrelacement très performante mais qui nécessite une initialisation du processus. Nous allons exposer la méthode à partir du même exemple que pour la technique d'entrelacement précédente. On reprend les trois mots c_1, c_2 et c_3 et les quatre mots suivant :

$$c_4 = (1, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$$

$$c_5 = (0, 1, 0, 0, 1, 1, 0)$$

$$c_6 = (0, 0, 1, 0, 0, 1, 1)$$

$$c_7 = (0, 0, 0, 1, 1, 0, 1)$$

On écrit le tableau suivant dans lequel la i -ème ligne est formée par la i -ème composante de chacun des 7 mots dans l'ordre des indices, et décalée à droite de $i - 1$ composantes. On transmet alors les colonnes du tableau 4. Les étoiles désignent les

TABLE 4. Table d'entrelacement à retard de 1

1	0	<u>0</u>	1	0	0	0	-						
*	1	0	<u>1</u>	0	1	0	0	-					
*	*	0	1	<u>1</u>	0	0	1	0	-				
*	*	*	0	1	<u>1</u>	0	0	0	1	-			
*	*	*	*	0	<u>1</u>	0	1	1	0	1	-		
*	*	*	*	*	0	1	<u>0</u>	1	1	1	0	-	
*	*	*	*	*	*	1	0	<u>0</u>	1	0	1	1	-

positions qui devront contenir un 0 à l'initialisation du processus. Le tiret en fin de ligne indique que l'on recommence le procédé avec 7 nouveaux mots du code et ainsi de suite jusqu'à la fin du message. Il faudra aussi achever le processus par des 0.

Les symboles du mot c_3 sont soulignés dans la matrice. Dans le message transmis, il y aura la 6-ème et la 7-ème colonne, c'est-à-dire la séquence

010110 * 0000011

Il y a deux symboles du mot c_3 . Les symboles en gras représentent un paquet d'erreur de longueur 8. Il est clair que pour tout paquet de longueur 8, il n'y aura jamais plus d'un symbole d'un mot du code qui sera affecté. On aurait pu décaler chaque ligne de r symboles, on dit dans ce cas que le code C a subi un *entrelacement à retard* r . On montre aisément que :

Proposition 11. *Soit C un code de longueur n , corrigeant des paquets d'erreurs de longueur l . Si C est entrelacé avec un retard r , alors on pourra corriger des paquets d'erreurs de longueur au plus $l(rn + 1)$.*

Remarque 13. Cette proposition est bien entendu valable pour des effacements.

3.5. Application : le code CIRC. On va s'intéresser à une famille de codes particuliers très utilisés dans la pratique pour leur grande capacité de correction, les codes de Reed-Solomon. Nous allons tout d'abord montrer que la distance minimale, et par conséquent la capacité de correction, d'un code linéaire (n, k) est bornée.

Proposition 12. *Si d est la distance minimale d'un code linéaire $C(n, k)$, alors $d \leq n - k + 1$. Cette borne est appelée borne de Singleton.*

Preuve. On sait qu'un code linéaire C est équivalent à un code linéaire systématique C' et que les paramètres n, k, d du code C sont les mêmes que ceux de C' ; on peut donc faire la démonstration pour le code C' . Soit G la matrice normalisée du code C' . Tout mot du code C' s'écrit donc comme combinaison linéaire des lignes de G ; le poids minimum du code est donc nécessairement inférieur au poids minimum des vecteurs composant les lignes de G , et *a fortiori* inférieur au poids maximum des vecteurs composant les lignes de G . Les k premières colonnes de la matrice normalisée G formant la matrice identité, le poids maximum d'une ligne est majoré par $1 + (n - k)$. \square

Définition 13. *On dit qu'un code linéaire $C(n, k)$ est Maximum Distance Separable (en abrégé MDS) si sa distance minimale d atteint la borne de Singleton, i.e. $d = n - k + 1$.*

On donne maintenant un théorème essentiel sur la distance minimale des codes cycliques dont on trouvera une démonstration dans [1].

Théorème 14. *Soit C un code cyclique de longueur n sur \mathbf{F}_q , de polynôme générateur $g(x)$ où n est premier avec q . Soit \mathbf{L} le corps des racines n -èmes de l'unité sur \mathbf{F}_q . (Corps de décomposition de $x^n - 1$ sur \mathbf{F}_q). Soit d un entier au moins égal à 1, et β une racine primitive n -ème de l'unité dans \mathbf{L} . Si $g(x)$ possède, parmi ses racines dans \mathbf{L} , $d - 1$ puissances de β dont les exposants sont des entiers consécutifs (modulo n), soit $\beta^r, \beta^{r+1}, \dots, \beta^{r+d-2}$, alors le poids minimum du code C est au moins d .*

Définition 15. *Un code BCH⁷ de distance construite d est un code cyclique dont le générateur est le produit des polynômes minimaux de $\beta^r, \beta^{r+1}, \dots, \beta^{r+d-2}$ pour un entier r donné (sans répétition de facteurs). Dans le cas $r = 1$, on dit que le code est un code BCH au sens strict.*

⁷. du nom des auteurs Bose-Chaudhuri-Hocquenghem

On peut donner la définition des codes de Reed-Solomon et ses propriétés (voir [1] pour les démonstrations).

Définition 16. Soit m un entier ≥ 2 . Un code de Reed-Solomon de longueur $p^m - 1$ est un code BCH de longueur $p^m - 1$ sur le corps de Galois \mathbf{F}_{p^m} .

Théorème 17. Le code de Reed-Solomon engendré par le polynôme $g(x) = (x - \alpha^i)(x - \alpha^{i+1}) \dots (x - \alpha^{i+l-1})$ a pour longueur $n = p^m - 1$, dimension $k = p^m - 1 - l$ et distance minimale $d = l + 1$.

On déduit immédiatement de cette propriété que les codes de Reed-Solomon sont MDS ce qui signifie que l'on ne peut pas trouver de meilleurs codes linéaires pour n et k fixés en ce qui concerne la capacité de correction.

Proposition 18. Si C est un code de Reed-Solomon de paramètres (n, k, d) et C' un code raccourci du code C de distance minimale d' alors $d = d'$.

Preuve. La proposition 3 nous permet d'écrire que $d' \geq d$ et la borne de Singleton nous donne $d' \leq (n - t) - (k - t) + 1 = d$. \square

Considérons le code de Reed-Solomon engendré par le polynôme $g(x) = (x - \alpha)(x - \alpha^2)(x - \alpha^3)(x - \alpha^4)$ où α est un élément primitif de \mathbf{F}_{2^8} . Les paramètres du code sont : $n = 255$, $k = 251$ et $d = 5$. On construit à partir de ce code deux codes raccourcis (voir proposition 2). Le premier est noté C_1 et a pour paramètres $n_1 = 28$, $k_1 = 24$ et le second C_2 a pour paramètres $n_2 = 32$, $k_2 = 28$. La distance minimale d_1 (resp. d_2) de C_1 (resp. C_2) est toujours 5 (proposition 18).

Rappelons qu'à la suite de l'échantillonnage, on regroupeait 6 échantillons de 32 bits (16 gauches et 16 droits) en trame de 24 octets. Les symboles de la trame sont utilisés comme symboles d'information du code C_1 , on y ajoute donc 4 symboles de parité. Les mots du code ainsi formés sont entrelacés avec un retard de 4 et servent alors de symboles d'information du code C_2 . On termine donc avec une trame de 32 octets.

Remarque 14. nous verrons plus loin qu'avant l'entrelacement, les symboles subissent une permutation qui sera nécessaire pour l'interpolation dans le cas de très grands paquets d'erreurs.

Ce codage est appelé *Cross Interleaved Reed-Solomon Code*, c'est-à-dire approximativement code croisé de Reed-Solomon avec entrelacement. Le code C_2 est utilisé pour corriger une erreur uniquement, et en détecter au plus 3 (voir remarque 11). La probabilité que le code C_2 ne détecte pas plus de quatre erreurs est infime. En effet pour que le code C_2 fasse une mauvaise correction, il faudrait qu'un mot du code soit "déplacé" dans une boule de rayon 1 centrée sur un autre mot du code. Dans tous les autres cas l'erreur est détectée puisque le mot erroné n'appartient à aucune boule de rayon 1 centrée en un mot du code. Calculons cette probabilité. Le nombre de vecteurs contenus dans toutes les boules de rayon 1 centrées sur les mots du code est $q^{k_2}(1 + n_2(q - 1))$ où $q = 2^8$. La probabilité pour qu'une erreur ne soit pas détectée est donc

$$\frac{q^{k_2}(1 + n_2(q - 1))}{q^{n_2}} = \frac{32q - 31}{q^4}$$

soit environ 1.9×10^{-6} . Il faut remarquer que si l'on avait utilisé la pleine capacité de correction du code C_2 à savoir 2 erreurs, la probabilité pour qu'une erreur ne soit pas détectée devenait :

$$\frac{q^{k_2} (1 + n_2(q-1) + \binom{n_2}{2} (q-1)^2)}{q^{n_2}}$$

soit

$$\frac{32q - 31 + 16 \times 31(q-1)^2}{q^4}$$

c'est-à-dire environ 7.5×10^{-3} , ce qui est nettement plus important.

Donc, si C_2 détecte une erreur, elle est corrigée. Si plusieurs erreurs sont détectées alors le décodeur envoie les 28 symboles de sortie comme des effacements. Ces 28 symboles effacés sont désentrelacés puis arrivent au décodeur C_1 . La proposition 8 nous dit que le code C_1 peut corriger 4 effacements. Cela correspond d'après la proposition 11 à un maximum de 15 colonnes effacées sur la matrice d'entrelacement (on ne considère pas les colonnes pouvant être partiellement effacées, puisque C_2 efface toujours une colonne complète).

Autrement dit le code permet de corriger 15 trames successives, ce qui correspond à une longueur de $588 \times 15 = 8820$ bits sur la piste (2.5mm) ou encore à $32 \times 15 \times 8 = 3840$ bits de signal.

D'autres types d'entrelacements sont utilisés, par exemple à la sortie du code C_2 on regroupe les 16 octets d'indice impair avec les 16 octets d'indice pair de la trame suivante. Cela augmente la probabilité du code C_2 de corriger une seule erreur puisque 2 erreurs consécutives affectent alors 2 mots distincts. De même à la sortie du code C_1 on a théoriquement la séquence suivante :

$$G_1 D_1 G_2 D_2 G_3 D_3 G_4 D_4 G_5 D_5 G_6 D_6 P_1 P_2$$

où G_i (resp. D_i) désigne les deux octets qui composent le i -ème échantillon gauche (resp. droit), et P_1, P_2 représentent les 4 symboles de parité sur 16 bits. Supposons qu'à la sortie du décodeur C_1 des effacements n'aient pas été corrigés, on peut alors interpoler ces valeurs dans la mesure ou l'échantillon précédent et l'échantillon suivant sont disponibles. Pour maximiser le nombre de symboles interpolables, on cherche à éloigner au maximum les échantillons successifs dans la trame. Pour cela on fait la permutation suivante avant l'entrée dans le deuxième circuit de codage :

$$G_1 G_3 G_5 D_1 D_3 D_5 P_1 P_2 G_2 D_2 G_4 D_4 G_6 D_6$$

La conséquence de cette permutation et de l'entrelacement avec retard est qu'un paquet d'erreurs sur 48 trames (de 32 symboles) permet toujours à la sortie du décodeur C_1 de disposer pour tout échantillon effacé de l'échantillon qui le précède et de l'échantillon qui le suit. On arrive alors à $32 \times 48 \times 8 = 12288$ bits ou encore à $588 \times 48 = 28224$ bits sur la piste ce qui correspond à une longueur d'environ 8.5mm sur le disque.

Il est absolument exclus d'envoyer un signal faux à la sortie du lecteur, en effet les différents maillons de la chaîne pourraient ne pas supporter un "click", particulièrement les enceintes. Si l'interpolation d'un symbole n'est pas réalisable parce que ses deux symboles voisins sont effacés, on baisse progressivement (suivant une sinusoïde) le niveau sonore à partir du début de la trame précédente, on laisse le niveau à zéro sur la trame incriminée et on rétablit progressivement le son pendant les 32 périodes d'échantillonnage de la trame suivante. Ce procédé est audible pour de très grands "trous" mais est difficilement décelable pour des micro-coupures.

Remarque 15. L'interpolation ne restitue pas exactement le signal original mais l'approximation est très bonne car on est en présence d'un signal très fortement corrélé puisqu'il s'agit, en principe, de musique. Il est évident que pour d'autres applications, ce procédé ne peut pas être envisagé.

Précisons aussi que les pleines possibilités de correction ne sont atteintes que par des lecteurs de haut de gamme (le prix de certains lecteurs atteint 550 000 nouveaux francs!), et qui apportent parfois de nouvelles solutions pour minimiser les erreurs à la lecture. La firme Wadia a conçu un décodeur dont la capacité de calcul est 100 fois celle d'un micro-ordinateur! Les normes fixées par Philips dans le *Red Book*⁸ n'exigent qu'une correction d'une rayure de 0.2mm sur le disque (voir [13]).

Sur les pochettes de disque compact, il est précisé qu'il ne faut pas essuyer le disque en faisant des cercles, mais du centre vers les bords. Ceci permet d'éviter qu'une rayure éventuelle ne se concentre sur des symboles consécutifs de la piste.

4. AUTRES SUPPORTS

4.1. Le vidéo-disque. Il existe depuis quelques années un support de même nature que le disque compact, utilisé pour le stockage du son et de l'image, le *vidéo-disque*. Historiquement c'est la firme Sony qui est à l'origine de ce support, pendant que Philips mettait au point le disque compact.

Comme pour le disque compact, le vidéo-disque permet de restituer, en plus de l'image, un son de haute qualité, il permet bien entendu de lire des disques compacts traditionnels. Le vidéo-disque se décline en trois tailles, 12cm, 20cm et 30cm (surfaces dorées) selon la capacité de stockage désirée.

Le principe de numérisation de l'image est simple, on utilise les propriétés de la lumière, à savoir qu'on peut exprimer toutes les couleurs à partir de trois couleurs fondamentales⁹ : le rouge le vert et le bleu (RVB). Une image (vidéo) est constituée d'un certain nombre de lignes (625 pour le standard français PAL) qui supportent chacune un ensemble de points appelé *pixels*. On peut décomposer la couleur c de chaque pixel comme combinaison linéaire des trois composantes fondamentales, i.e.

$$c = \alpha.R + \beta.V + \gamma.B$$

où α , β et γ désignent les intensités respectives des trois couleurs RVB. Il suffit alors de choisir un ensemble fini de valeurs pour l'intensité, par exemple en codant sur

8. Guide des spécifications techniques du disque compact audio

9. On peut très facilement munir l'ensemble des couleurs d'une structure d'espace vectoriel de dimension deux.

8 bits soit 256 valeurs, et ainsi un pixel est représenté par une séquence binaire de trois mots de 8 bits. Cette représentation permet de supporter 16 777 216 couleurs.

Cette information supplémentaire constitue un accroissement considérable du volume d'information. Il y a 25 images par seconde, et si on considère 400 points par ligne, il faut

$$25 \times 625 \times 400 \times 8 \times 3 = 150\,000\,000$$

bits pour une seconde d'images sans tenir compte du son ! Si on inclut le son et les différents codages, on arrive à une quantité phénoménale d'information. Ce volume est tellement important que même avec le principe de lecture optique du disque, on ne peut stocker plus d'une heure par face sur un disque vidéo de 30cm. De plus, on a limité la définition de l'image enregistrée à 400 lignes, on est donc en dessous de la capacité théorique des postes de télévision, mais il faut remarquer à titre comparatif que le meilleur magnétoscope VHS atteint difficilement 250 lignes.

Remarque 16. Il existe trois standards d'enregistrement pour le vidéo-disque, mais en général tous les lecteurs supportent les trois. Il faut remarquer à ce sujet que tous ces standards ne permettent pas une reproduction sonore de même qualité que le disque compact.

Ce procédé, s'il est acceptable aujourd'hui, ne le sera plus dans un avenir très proche. En effet, très prochainement le nouveau standard de transmission des images vidéo sera d'une part au format 16 × 9 (donc plus proche du format cinéma, contrairement au format d'écran 4 × 3 actuel), et en haute définition, c'est à dire en 1250 lignes pour 1920 points, au lieu de 625 pour 400 points (si Thomson gagne la bataille contre les japonais sur le standard de haute définition). Des postes de télévision au standard HD-MAC 16/9 sont déjà commercialisés et certaines émissions compatibles sont transmises par les satellites TDF1 et TDF2.

Remarque 17. Aucun canal actuel n'a un débit suffisant pour transmettre à la fois l'image et le son en 16/9 et 1250 lignes en numérique. Pour l'image, on ne transmet pas les intensités des trois couleurs fondamentales (la *chrominance*), mais plutôt l'intensité de deux des trois couleurs et la *luminance*, c'est à dire la somme des trois intensités. La couleur manquante est reconstituée à partir de ces trois paramètres. On transmet alors uniquement le son et la luminance en numérique et on transmet les deux couleurs en analogique.

Pour les années à venir, il faudra impérativement améliorer de façon sensible la capacité de stockage des vidéo-disques sous peine de les voir disparaître du marché. En effet, des procédés d'enregistrement vidéo-numériques sur bandes magnétiques voient le jour et sont d'une qualité équivalente au vidéo-disque (par exemple le Hi-8mm). Leur format est beaucoup plus réduit et il permettent en plus d'enregistrer.

Le disque compact quant à lui ne risque pas, à moyen terme, de subir des transformations. Une augmentation de sa capacité de stockage ne serait que d'un intérêt très limité, la très grande majorité des œuvres commercialisées ne dépassent pas 40mn et la réduction de la taille du support deviendrait insupportable, ne serait-ce que pour tenir le disque en main ! Le disque compact a donc de beaux jours devant lui.

4.2. La DAT. La DAT (Digital Audio Tape) se présente sous la forme d'une cassette légèrement plus petite (73mm×54mm×10.5mm) que la cassette analogique classique. Contrairement au disque compact, les lecteurs DAT ne sont pas limités à la reproduction sonore mais permettent aussi de réaliser des enregistrements, il est donc plus juste de les qualifier de lecteurs/enregistreurs DAT. Le revêtement d'une cassette DAT est constitué de particules métalliques qui autorisent une densité linéaire d'enregistrement de 155 kilo-octets par cm. Les contraintes de lecture sont moins importantes que pour le disque compact et les symboles de huit bits sont modulés sur 10 bits seulement. On fait successivement une modulation 5-6 puis une modulation 3-4. Ce codage génère des séquences binaires pour lesquelles la RDS ne prend que trois valeurs : -1, 0 et 1 (voir [15]). De la même manière que pour le disque compact, on utilise un code correcteur CIRC. Les grandes idées du disque compact on donc été reprises pour ce support.

Pour la lecture des cassettes préenregistrées du commerce, la fréquence est identique à celle du disque compact soit 44.1kHz, par contre les premiers appareils DAT n'autorisaient que deux fréquences d'échantillonnage pour l'enregistrement, 32kHz et 48kHz. Le but avoué de cette limitation était d'empêcher l'enregistrement direct d'un disque compact sur une cassette DAT, c'est à dire sans passer par une double conversion N/A et A/N. Cette précaution était sensée éviter le problème des copies pirates que connaissait le disque 33t avec la cassette analogique.

Cet artifice eut pour conséquence de limiter les ventes d'appareils DAT ce qui interdisait une production massive et par la même occasion une réduction sensible du prix de vente. Tout cela a abouti à un échec relatif du procédé. Aujourd'hui les fabricants sont revenus sur leurs positions et proposent un appareil qui permet d'enregistrer un disque compact sans conversion, mais qui marque la cassette et ainsi interdit la duplication.

Remarque 18. La firme Philips a conçu un appareil d'enregistrement numérique qui devrait être commercialisé prochainement, et qui utilise des cassettes audio traditionnelles. Les caractéristiques annoncées dépassent largement celles de la DAT et, avantage décisif, les lecteurs pourront lire les anciennes cassettes enregistrées en analogique !

4.3. Le MOD. Ce support qui vient d'être commercialisé par la firme Thomson permet de conserver les avantages du disque compact tout en autorisant l'enregistrement. Le stockage des données n'est plus réalisé "mécaniquement" par embossage mais par orientation de particules sur un support magnétique. Le MOD ou *Magneto-Optical-Disc* est constitué d'un disque plastique recouvert d'une couche de particules métalliques. On fait évoluer ce disque dans un champ magnétique perpendiculaire à l'orientation des particules, mais on limite sa puissance pour ne pas retourner les particules.

L'enregistrement consiste alors à chauffer les particules jusqu'à ce qu'elles atteignent leur température de Curie, elles se polarisent alors en sens inverse. Pour la lecture, on utilise l'effet de Faraday. Lorsque la lumière est réfléchiée par une particule polarisée, son plan de polarité subit une rotation qui dépend de l'orientation de la

particule. On obtient donc un faisceau de lumière modulée qui contient l'information binaire. La capacité d'enregistrement est d'environ une heure, soit un quart d'heure de moins que le disque traditionnel.

Remarque 19. Les lecteurs MOD devraient pouvoir lire les disques compacts habituels.

RÉFÉRENCES

- [1] N. J. A. SLOANE F. J. MACWILLIAMS. *The Theory of Error Correcting Codes*, volume 16 of *Mathematical Library*. North-Holland, 1977.
- [2] L. B. VRIES H. HOEVE, J. TIMMERMANS. Error correction and concealment in the compact disc system. *Philips Technical Review*, 40(6) :166–172, 1982.
- [3] H. NIEDERREITER R. LIDL. *Finite Fields*, volume 20 of *Encyclopedia of Mathematics*. Cambridge University Press, 1984.
- [4] P. C. van OORSCHOT S. A. VANSTONE. *An Introduction to Error-Correcting Codes with Applications*. Kluwer Academic Publisher, 1990.
- [5] M. AIGNIER. *Combinatorial Theory*. Springer-Verlag, 1979.
- [6] M. DARMON. Le disque compact. Document interne Thomson, 1991.
- [7] G. ERICKSON. A fundamental introduction to the compact disc player. Document html, www.tc.umn.edu/nlhome/g496/eric0139/Papers/paper.html, 1994.
- [8] J. HIRAGA. La rumeur du vert. *L'audiophile*, 5, 1991.
- [9] D. G. HOFFMAN & others. *Coding Theory – The Essentials*. Marcel Dekker Inc, 1992.
- [10] R. LUCAS. *Acoustique*. Claude Hermant, Paris, 1964.
- [11] R. J. MCELIECE. *The Theory of Information and Coding*. Addison-Wesley, 1977.
- [12] R. J. MCELIECE. *Finite Fields for Computer Scientists and Engineers*. Kluwer Academic Publishers, 2nd, 1996 edition, 1987.
- [13] K. C. POHLMANN. *The Compact Disc Handbook*. A-R Editions Inc., 2nd edition, 1992.
- [14] P. RABIZZONI. *Démultipliés de codes sur une extension de $\mathbf{F}(q)$* . PhD thesis, Université de Toulon et du Var, 1982.
- [15] K. A. SCHOUHAMER IMMINK. *Coding Techniques for Digital Recorders*. Prentice Hall, 1991.
- [16] A. SPATARU. *Fondements de la théorie de l'information*. Presses polytechniques romandes, 1991.