Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I23.

TD 5. Groupes

EXERCICE 1. Démontrez qu'un élément neutre d'un magma unifère est nécessairement unique.

EXERCICE 2. Démontrez que la réunion est également distributive sur l'intersection sur l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des parties d'un ensemble X.

EXERCICE 3. Démontrez que la différence symétrique Δ est une loi de composition interne associative sur l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des parties d'un ensemble X. On rappelle que $X \mathbin{\Delta} Y = (X \cup Y) \setminus (X \cap Y)$.

EXERCICE 4. Démontrez que si X et Y sont deux ensembles munis de lois de composition internes, alors la bijection réciproque f^{-1} d'un morphisme bijectif $f : X \to Y$ est nécessairement un morphisme.

EXERCICE 5. Soient X, Y et Z trois ensembles structurés et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux morphismes (resp. isomorphismes). Démontrez que l'application $g \circ f$ est un morphisme de $X \to Z$ (resp. isomorphismes).

EXERCICE 6. Démontrez ce théorème.

EXERCICE 7. En nous inspirant de la construction de $\mathbb{Z}$, trouvez la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ entre couples de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et la loi de composition sur $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ pour construire l'ensemble $\mathbb{Q}$ comme le quotient $(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/\mathscr{R}$.

EXERCICE 8. Justifiez chaque égalité de la preuve ci-dessus en identifiant les propriétés des lois de groupe qui ont été appliquées.

EXERCICE 9. Vérifiez que la relation de conjugaison sur un groupe G est une relation d'équivalence.

EXERCICE 10. Décrivez toutes les permutations des groupes $\mathfrak{S}_1$ et $\mathfrak{S}_2$. Montrez que ces groupes sont commutatifs.

EXERCICE 11. Démontrez ce théorème. Indication : Construisez deux permutations de $\mathfrak{S}_n$ où $n \geq 3$ qui laissent tous les entiers $k > 3$ fixes et qui ne commutent pas.

EXERCICE 12. Quelles sont les orbites de la permutation identité ?

EXERCICE 13. Soit $\sigma \in \mathfrak{S}(X)$ et $\mathscr{O}$ une orbite suivant σ. Démontrez que l'application induite par σ sur $\mathscr{O}$ est une bijection.

EXERCICE 14. Soient $n$et k deux entiers naturels tels que $1 \leq k \leq n$. Montrer que l'application σ définie par $\sigma(k) = 1+(n+k-1)\%n$ où $a\%b$ désigne le reste de la division euclidienne de a par b, est une permutation de $\mathfrak{S}_n$. Calculez son support.

EXERCICE 15. Démontrez que si σ est un p-cycle, alors $\sigma^p = \mathrm{Id}$. Quelle est l'inverse d'un p-cycle ?

EXERCICE 16. Montrez que la classe de conjugaison de la permutation identique Id est réduite à Id quel que soit le groupe symétrique.

EXERCICE 17. Montrez que les transpositions $(1, 2)$ et $(1, 3)$ sont conjuguées dans $\mathfrak{S}_3$.

EXERCICE 18. Combien y-a-t-il de partitions de l'entier $n = 5$?

EXERCICE 19. Déterminez les classes de conjugaison des groupes $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$.

EXERCICE 20. Construisez le 3-cycle $(1, 2, 3)$ à l'aide de transpositions compatibles. Indication : considérez le circuit formé par les 12 cases en bordure du taquin en configuration identité et faites tourner les 11 pièces autres que la pièce vide d'une position dans le sens anti-horaire. Déplacez la pièce vide sur la case numéro 6 et faites tourner les pièces $(1, 2, 3)$ puis ramenez la pièce vide en position 16. Vérifiez que $(1, 2, 4)$ est le conjugué de $(1, 2, 3)$ par $(3, 4, 8, 12, 15, 11, 7)$.

EXERCICE 21. En vous inspirant de cet exemple, construisez les 3-cycles suivants :

$(1,2,5)$,	$(6,11,7)$,	$(3,6,7)$,
$(5,9,6)$,	$(6,10,7)$,	$(3,8,4)$,
$(11,15,12)$,	$(10,14,11)$,	$(9,13,10)$.

Calculer le conjugué de $(1,6,2)$ avec $(5,9,6)$. Avec d'autres conjugaisons, trouvez tous les 3-cycles manquants.