Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I23.

TD 4. Combinatoire [1]

EXERCICE 1. Démontrez qu'un ensemble naturel est totalement ordonné.

EXERCICE 2. Considérons $X := \{\upsilon, \zeta, \tau\}$ muni de l'ordre alphabétique grec et $Y := \{z, t, u\}$ muni de l'ordre alphabétique latin. Démontrez qu'il existe une unique bijection croissante entre X et Y et que sa bijection réciproque est croissante elle aussi.

EXERCICE 3. Inspirez vous de la construction d'un successeur pour définir le *prédécesseur* $\operatorname{prec}(n)$ d'un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Indication : construisez une demi-droite à laquelle vous appliquerez la deuxième propriété d'un ensemble naturel.

EXERCICE 4. Démontrez que l'application $\operatorname{succ} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ définie par $n \mapsto \operatorname{succ}(n)$ est une *bijection* croissante. En déduire que l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est un ensemble naturel.

EXERCICE 5. Soient n et m deux entiers naturels et f une application de $\mathbb{N}_m \to \mathbb{N}_n$. Démontrez que

(1) Si f est une *injection* alors $m \leq n$.
(2) Si f est une *surjection* alors $n \leq m$.
(3) Si f est une *bijection* alors $m = n$.

EXERCICE 6. La carte d'un restaurant propose 3 entrées, 4 plats et 4 desserts. Combien de menus différents peut-on constituer ?

EXERCICE 7. Combien peut-on constituer de numéros de téléphone de 8 chiffres ne contenant pas 0 ?

EXERCICE 8. Un QCM contient 20 questions comportant chacune 4 réponses possibles dont une seule est correcte. Combien de QCM différents peut-on produire en mélangeant les questions et les réponses à l'intérieur de chaque question ?

1. version du 14 janvier 2019, 16 : 39

EXERCICE 9. Un code de carte bancaire contient 4 chiffres. Combien de codes distincts peut-on constituer si les 4 chiffres sont différents ? Si deux chiffres au moins sont identiques ?

EXERCICE 10. Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot *maths* ? Combien y-a-t-il d'anagrammes distinctes du mot *arbre* ?

EXERCICE 11. Une *grille* du loto est constituée de 6 numéros tous distincts choisis entre 1 et 49. Combien existe-t-il de grilles différentes ?

EXERCICE 12. Une *adresse* IP est constituée de 4 nombres non-nuls de 8 bits. Combien existe-t-il d'adresses IP distinctes ? Même question si les 4 nombres sont tous différents ? Même question s'il faut moins de 16 bits nuls ?

EXERCICE 13. La classe de I23 comporte f filles et g garçons.

(1) Combien de groupes de 4 étudiant(e)s peut-on constituer ?
(2) Même question si le groupe contient au moins une fille et au moins un garçon ?
(3) même question si le groupe ne contient que des hommes ?
(4) même question Si le groupe ne contient que des personnes du même sexe ?

EXERCICE 14. On constitue une *main* avec 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Combien y-a-t-il de mains contenant :

(1) un carré (quatre carte de même valeur) ?
(2) deux paires différentes ?
(3) un brelan (trois cartes de même valeur) ?
(4) un full (un brelan et une paire) ?
(5) une quinte (5 cartes qui se suivent de même couleur) ?

EXERCICE 15. Quatres pigeons et 2 pies se posent côte à côte sur un cable EDF.

(1) Combien y-a-t-il de dispositions possibles ?
(2) Même question avec les pigeons d'un côté et les pies de l'autre ?
(3) Même question si chaque pie est entre deux pigeons ?
(4) Même question si les pies sont côte à côte ?

EXERCICE 16. Formalisez et démontrez le *principe des tiroirs* : si n caleçons sont rangées dans m tiroirs (peu importe dans quel ordre) avec $n > m$, un tiroir contient au moins 2 caleçons.

EXERCICE 17. De combien de façons différentes peut-on empiler 8 tee-shirts sur une étagère ?

EXERCICE 18. Soient p et n deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$. Démontrez les identités suivantes :

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p},$$
$$\binom{n+1}{p+1} = \binom{n}{p} + \binom{n}{p+1}.$$

EXERCICE 19. Quelle est le plus grand entier n pour lequel votre calculatrice est capable de calculer la factorielle $n!$. En quoi le triangle de Pascal permet-il de calculer plus efficacement des coefficients binomiaux que par la formule (**??**) ?

EXERCICE 20. Développer l'expression $(x-y)^6$. Soit n un entier naturel, quels sont les coefficients du polynôme $(1+X)^n$ une fois développé ?

EXERCICE 21. Soient p et n deux entiers tels que $0 \leq p \leq n$. Démontrez que

$$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = n2^{n-1}.$$

Indication : utilisez la formule du binôme pour développer le polynôme $P(X) := (X+1)^n$. Calculez également son polynôme dérivé.

EXERCICE 22. Soit n un entier naturel. Démontrez que

$$\prod_{k=1}^{n}(2k) = 2^n n!$$
$$\prod_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

Indication : séparez les termes pairs et impairs dans le calcul de $(2m)!$.

EXERCICE 23. Soit q un entier naturel. Démontrez que

$$\sum_{k=0}^{n} kq^k = \frac{q}{(q-1)^2}[q^n(n(q-1)+1)+1].$$

Indication : Vérifiez que le polynôme $P(X) := \frac{X^{n+1}-1}{X-1} = X^n + X^{n-1} + \cdots + X^2 + X + 1$. Calculez également son polynôme dérivé.

EXERCICE 24. Soit n un entier naturel. Démontrez par récurrence que

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

EXERCICE 25. Soit k un entier naturel impair. Démontrez par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \sum_{i=1}^{n} i^k \quad \text{est divisible par} \quad \frac{n(n+1)}{2}$$

EXERCICE 26. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. On définit la suite réelle $(H_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\{0\}}$ par

$$H_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Démontrez par récurrence que pour $n \geq 2$, $H_n \notin \mathbb{N}$ en montrant que H_n est le quotient d'en entier naturel pair et d'un entier naturel impair (distinguez le cas où n est pair et impair).

EXERCICE 27. En reprenant les mêmes conditions initiales que dans la définition des nombres de Stirling, démontrez l'égalité

$$S(n+1,p) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(k,p-1).$$