Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I23.

TD 3. Relations, applications [1]

EXERCICE 1. Considérons les trois ensembles

$$C := \{R, V, B\}, \quad V := \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, \quad G := \{(R, 2), (V, 5), (B, 7)\}.$$

Comment qualifie-t-on les éléments de l'ensemble G ? De quel ensemble G est-il un sous-ensemble dans ce contexte ? Tracez le diagramme sagittal de la correspondance (C, G, V). Est-ce une fonction ? Une application ?

EXERCICE 2. Décrivez en extension les ensembles de départ, d'arrivée et le graphe G de la correspondance f définie par le diagramme sagittal suivant :

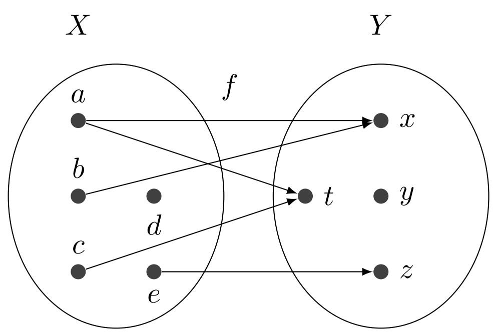

Figure 1. Diagramme sagittal de la correspondance f

S'agit-il d'une application ? D'une fonction ? Dessinez le diagramme sagittal de la correspondance réciproque.

EXERCICE 3. Soit X un ensemble non-vide et $f : X \times X \to \mathscr{P}(X)$ définie par $f(x, y) := \{x, y\}$. Calculez l'image réciproque des éléments de $\mathscr{P}(X)$.

EXERCICE 4. Soit X un ensemble et A un sous-ensemble strict et non-vide de X. Soit f et g deux applications de $\mathscr{P}(X)$ dans lui-même définies par

$$f(B) := A \cup B, \qquad g(B) = A \cap B.$$

Ces applications sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. version du 15 janvier 2019, 13 : 33

EXERCICE 5. Soit X l'ensemble des étudiants de I23 et $\mathscr{A} := \{a, b, \ldots, z\}$ l'alphabet latin. L'application $f : X \to \mathscr{A}$ qui a tout étudiant associe la première lettre de son nom de famille est-elle injective ?

EXERCICE 6. Les fonctions réelles trigonométriques sin, cos et tan sont-elles injectives ? Surjectives ? Changez les ensembles de départ et d'arrivéée pour que la fonction cos soit bijective.

EXERCICE 7. Soit X, Y et Z trois ensembles et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. Démontrez que $g \circ f$ peut-être injective (resp. surjective) sans que g (resp. f) le soit.

EXERCICE 8. On définit une relation binaire $\mathscr{R}$ sur l'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ par $f \mathscr{R} g$ si et seulement les deux applications sont égales à partir d'un certain rang. Formalisez la définition de cette relation binaire. Démontrez qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

EXERCICE 9. Soit A et B deux parties d'un ensemble X. On définit une application $f : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ par $f(X) := (X \cap A, X \cap B)$.

(1) Démontrez que f est injective si et seulement si $A \cup B = X$.

(2) Démontrez que f est surjective si et seulement si $A \cap B = \varnothing$.

(3) Quelle condition doit satisfaire f pour être bijective ?

EXERCICE 10. Décrivez le graphe des deux applications f et g définies par les diagrammes sagittaux ci-dessous. Ces applications sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?
Dessinez le diagramme sagittal de la composition $g \circ f$ de ces deux applications et décrivez son graphe. L'application $g \circ f$ est-elle injective, surjective, bijective ? La correspondance réciproque de $g \circ f$ est-elle une fonction ? Une application ?

EXERCICE 11. Soit $\mathscr{B} := \{0, 1\}$, X un ensemble quelconque et A une partie de X. On définit la *fonction indicatrice* de A notée $\mathbf{1}_A : X \to \mathscr{B}$ par

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $B \in \mathscr{P}(X)$.

(1) Que peut-on dire des ensembles A et B si $\mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$?

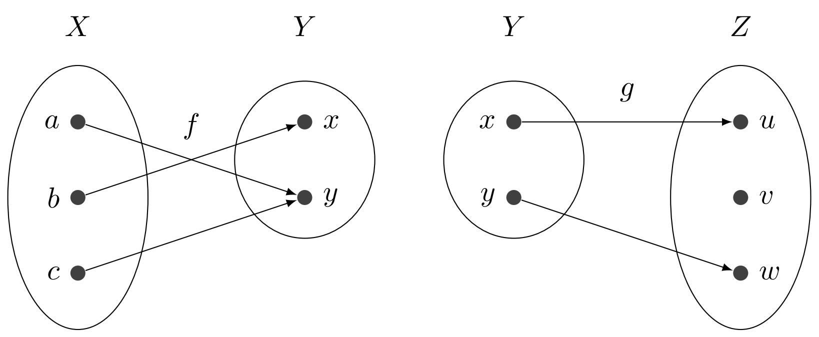

Figure 2. Diagrammes sagittaux des applications f et g

(2) Exprimez la fonction indicatrice du complémentaire de A dans X, de $A \cap B$ et de $A \times B$ à l'aide des fonctions indicatrices de A et B.

(3) Si les ensembles A et B sont disjoints, exprimez la fonction indicatrice de $A \cup B$.

(4) Si A et B sont quelconques, créez une partition de $A \cup B$ qui contient A et un autre ensemble à déterminer. En déduire un expression de la fonction indicatrice de $A \cup B$ à l'aide des fonctions indicatrices de A et B.

(5) Soit f une fonction de X dans un ensemble Y. De quel ensemble la fonction $\mathbf{1}_A \circ f$ est-elle la fonction indicatriceé ?

(6) Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $(A_i)_{i \in [1,n]}$ une partition de l'ensemble X. En considérant que $\mathscr{B}$ est plongé dans l'ensemble $\mathbb{N}$ muni de l'addition, montrez que

$$\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} = \mathbf{1}_A.$$

EXERCICE 12. Écrivez la définition de la correspondance réciproque d'une correspondance $c = (X, G, Y)$.

EXERCICE 13. Soit X et Y deux ensembles et $x, x' \in X$ et $y, y' \in Y$. Démontrez que

$$(x, y) = (x', y') \iff (x = x') \wedge (y = y')$$

EXERCICE 14. Exprimez formellement qu'une correspondance n'est pas fonctionnelle en écrivant la négation de :

$$\forall x \in X \quad \forall (y, z) \in Y \times Y \quad \big((x, y) \in G \;\wedge\; (x, z) \in G\big) \Rightarrow y = z.$$

Réécrivez la définition d'une fonction en remplaçant cette proposition par sa contraposée.

EXERCICE 15. Définissez le domaine de définition $\mathscr{D}_f$ d'une fonction $f : X \to Y$ avec une écriture en compréhension. Comment qualifie-t-on l'écriture

$$\mathscr{D}_f = \{\textit{glace, alcool, cinéma, smartphone, livre}\}.$$

de l'ensemble $\mathscr{D}_f$?

EXERCICE 16. La correspondance réciproque de la correspondance de la figure 1 définit-elle une fonction ? La fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto x^2$ est-elle une application ? Sa correspondance réciproque est-elle une fonction ?

EXERCICE 17. Soit $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux bijections. Démontrez que

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}. \tag{1}$$

Généralisez à la composition de n applications $f_1, f_2, \ldots, f_n$ où pour tout $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $f_i : X_i \to Y_i$ avec $Y_i = X_{i+1}$:

$$(f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1)^{-1} = f_1^{-1} \circ f_2^{-1} \circ \cdots \circ f_{n-1}^{-1} \circ f_n^{-1}. \tag{2}$$

EXERCICE 18. Montrez qu'une application $f : X \to Y$ est une bijection si et seulement s'il existe une application $g : Y \to X$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{Id}_X \quad \text{et} \quad f \circ g = \mathrm{Id}_Y. \tag{3}$$

Montrez dans ce cas que g est l'application réciproque f^{-1} de f.

EXERCICE 19. Dans le plan euclidien, tracez les deux demi-droites A et B définies par

$$A := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \geq 0 \;\; y = 1\}$$
$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x \leq 0 \;\; y = 0\}$$

Montrez que $A \cap B = \varnothing$. Considérons l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) := (x, 0)$. Calculez $f(A) \cap f(B)$. Quelle propriété une application f devrait vérifier pour que l'inclusion

$$f\left(\bigcap_{i \in I} X_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(X_i),$$

soit remplacée par une égalité ?

EXERCICE 20. Écrivez le graphe de la figure 9 en extension. Cette relation satisfait-elle quelques propriétés ?

EXERCICE 21. Écrivez la négation logique de chacune des propriétés d'un graphe.

EXERCICE 22. Sur quels ensembles et quels critères (informels) définiriez-vous la relation d'équivalence dont une classe d'équivalence serait les hommes ? Même question pour les tournevis.

EXERCICE 23. Démontrez que si $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence définie sur un ensemble X. L'ensemble $X/\mathscr{R}$ est une *partition* de l'ensemble X. Réciproquement soit $Y \subseteq \mathscr{P}(X)$ une partition d'un ensemble X. Il existe une unique relation d'équivalence $\mathscr{R}$ sur X telle que $X/\mathscr{R} = Y$, elle est définie par

$$x\mathscr{R}y \iff \exists A \in Y \quad (x \in A) \text{ et } (y \in A). \tag{4}$$

EXERCICE 24. Démontrez que la relation binaire d'inclusion $\subseteq$ définie sur l'ensemble $\mathscr{P}(X)$ des parties d'un ensemble X est une relation d'ordre.

EXERCICE 25. Écrivez sous forme logique avec quantificateurs la définition de l'ordre lexicographique entre n-uplets $(x_i)_{i \in I}$ et $(y_i)_{i \in I}$. Démontrez qu'il s'agit bien d'une relation d'ordre et que si les n relations d'ordre $\preceq_i$ sont totales alors l'ordre lexicographique est une relation d'ordre total.

EXERCICE 26. Démontrez que pour tout couple $(x, y) \in I \times I$ où I est un intervalle ou une demi-droite, tout élément compris entre x et y appartient à l'intervalle I.

EXERCICE 27. Démontrez que toute application monotone et injective est strictement monotone. Démontrez que la composition de deux applications monotone est monotone.