Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I23.

TD 2. Calcul booléen [1]

EXERCICE 1. Écrivez la négation des formules suivantes :

(1) $$F_1 := \overline{x}\,\overline{y} + x\,y + \overline{x}\,y$$

(2) $$F_2 := x(\overline{y}\,\overline{z} + y\,z) + \overline{x}\,y\,\overline{z} + \overline{x}\,z$$

(3) $$F_3 := x\,\overline{y} + t\,\overline{z} + x\,y + \overline{t}\,z$$

(4) $$F_4 := (x + y)(\overline{x} + z)$$

(5) $$F_5 := (\overline{x}\,\overline{z} + y\,\overline{z})(x + y\,\overline{z})$$

EXERCICE 2. Démontrez que l'opérateur binaire *non et*, dit d'*incompatibilité*, noté $\uparrow$ et défini par

$$x \uparrow y \equiv \neg(x \wedge y)$$

est un *opérateur universel*, c'est-à-dire que l'on peut définir les trois opérateurs *non*, *ou* et *et* par des combinaisons de cet opérateur. Indication : on a $\overline{x} = x \uparrow x$. Montrez que l'opérateur *non ou* est lui aussi universel.

EXERCICE 3. Démontrez la propriété de redondance et sa propriété duale i.e.

$$\forall a, b, x \in \mathcal{B}, \quad ax + \overline{a}y = ax + \overline{a}y + xy.$$

Montrez la propriété de simplification, i.e.

$$\forall a, b \in \mathcal{B}, \quad a + \overline{a}\,b = a + b.$$

EXERCICE 4. Soit x, y, z et t quatre variables booléennes. Vérifiez les égalités suivantes :

(1) $$xy + xzt + \overline{y}t = xy + \overline{y}t$$

(2) $$(\overline{x} + y)(x + z)(y + z) = (\overline{x} + y)(x + z)$$

(3) $$xy + \overline{y}\,z = (x + \overline{y})(y + z)$$

(4) $$\overline{x\,\overline{y} + \overline{x}\,y} = xy + \overline{x}\,\overline{y}$$

(5) $$\overline{(x + y)(\overline{x} + z)} = (x + \overline{y})(\overline{x} + \overline{z})$$

EXERCICE 5. Définissez les fonctions logiques correspondant à chaque opérateur logique.

1. version du 16 janvier 2019, 14 : 19

EXERCICE 6. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ et $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des variables booléennes. Démontrez les lois de De Morgan généralisées :

(1) $$\overline{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)} = \overline{x}_1\,\overline{x}_2 \cdots \overline{x}_n$$

(2) $$\overline{(x_1\,x_2 \cdots x_n)} = \overline{x}_1 + \overline{x}_2 + \cdots + \overline{x}_n$$

EXERCICE 7. Quelles sont les formes normales canoniques conjonctives et disjonctives des fonctions suivantes ?

(1) $$f(x, y) := \overline{x} + xy$$

(2) $$f(x, y, z) := \overline{x} + x(y + \overline{z})$$

(3) $$f(x, y) := x$$

(4) $$f(x) := 1$$

EXERCICE 8. Dessinez les circuits logiques qui réalisent les fonctions booléennes suivantes :

(1) $$f(x, y) := (\overline{x} + \overline{y})x + x\overline{y}$$

(2) $$f(x, y, z) := z(\overline{x} + \overline{y})x + x\overline{z}y$$

(3) $$f(x, y, z) := (x + \overline{y} + z)\overline{x}$$

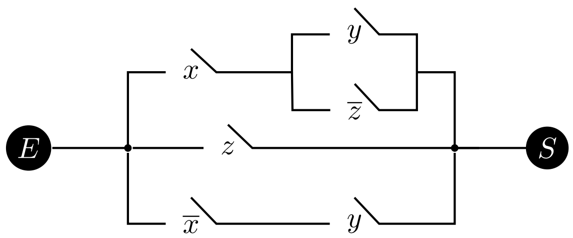
EXERCICE 9. Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Démontrez que le nombre de modifications du k-ème bit (où $k = 0$ désigne le bit de poids faible à droite) de la représentation binaire des 2^n entiers naturels dans l'énumération croissante est égal à 2^{k-1}.

EXERCICE 10. On considère la fonction booléenne f de 4 variables x, y, z et t dont la table de Karnaugh est la suivante :

xy \ zt	00	01	11	10
00			1	1
01			1	1
11	1	1	1	1
10			1	1

Donnez la forme normale disjonctive canonique de la fonction f et simplifiez son expression. Dessinez le circuit logique correspondant avec les trois portes usuelles.

EXERCICE 11. On considère le circuit électrique suivant comportant plusieurs interrupteurs. Par convention, quand deux interrupteurs sont dénotés par des littéraux identiques (resp. opposés) c'est qu'ils sont dans le même état (resp. dans l'état contraire).



Écrivez la fonction booléenne $S(x, y, z)$ qui modélise s'il y a du courant ou pas en sortie S du circuit. Calculez la table de vérité de cette fonction.

EXERCICE 12. On veut modéliser le fonctionnement d'une "machine à café" qui distribue du café, du thé ou du lait en appuyant sur le bouton correspondant après qu'une pièce de 1 a été introduite. Il est possible d'obtenir un café au lait ou un thé au lait en appuyant simultanément sur les deux boutons correspondant. Si l'opérateur appuie simultanément sur café et thé, la pièce est restituée.

On considère les 4 variables booléennes t, c, l et p qui codent les propositions suivantes :

— $c = 1$ si et seulement si le bouton *café* est enfoncé.
— $t = 1$ si et seulement si le bouton *thé* est enfoncé.
— $l = 1$ si et seulement si le bouton *lait* est enfoncé.
— $p = 1$ si et seulement si une *pièce* de 1 a été introduite.

(1) Trouvez les expressions des fonctions booléennes C, T, L et P de ces 4 variables et qui indiquent respectivement la distribution ou non d'un café, thé ou lait et la restitution ou non de la pièce de monnaie.

(2) Simplifiez les expressions de ces fonctions.

EXERCICE 13. On considère la suite binaire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_{n+2} := u_{n+1} \oplus u_n.$$

avec les valeurs initiales (u_0, u_1).

(1) Trouvez les 10 valeurs suivantes de cette suite avec les valeurs initiales $(0, 1)$. Vérifiez que cette suite est *périodique*, c'est-à-dire satisfait $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+p} = u_n$ où $p \in \backslash\{0\}$ désigne sa *période*, et déterminez cette période.

(2) Même question avec les valeurs initiales $(0, 1)$ et $(1, 1)$.

On considère la suite binaire $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_{n+4} := u_{n+2} \oplus u_n.$$

avec les valeurs initiales (u_0, u_1, u_2, u_3).

(1) Trouvez les valeurs suivantes de cette suite avec les valeurs initiales $(1, 1, 0, 1)$. Vérifiez que cette suite est périodique et déterminez sa période.

(2) Même question avec les valeurs initiales $(1, 0, 1, 0)$ et $(1, 1, 1, 1)$.

(3) Démontrez que quelle que soient les valeurs initiales, une telle suite est périodique et que sa période est au plus 6.

EXERCICE 14. On dispose d'un disque rotatif codant 8 directions, Nord, Nord-Ouest, Ouest, Sud-Ouest, Sud, Sud-Est, Est, Nord-Est à l'aide d'un code de Gray de dimension 3. Par convention on suppose que le triplet nul $(0, 0, 0)$ code le Nord. Soit f la fonction booléenne à trois variables x, y et z qui vaut 1 quand la direction est le Nord ou le Sud-Est. Construisez la table de Karnaugh de cette fonction et écrivez la forme normale disjonctive canonique de cette fonction. Simplifiez la fonction et élaborez un circuit logique pour la boussole qui allume une diode si la direction est le Nord ou le Sud-Est.