## Mathématiques pour l'informatique. L1 Informatique I23.

TD 1. Logique et ensembles [1]

### Logique propositionnelle

**EXERCICE 1.** Un mathématicien discute avec un ami logicien dont la femme vient d'accoucher. Il lui demande s'il a eu un garçon ou une fille et le logicien lui répond *oui*. Expliquez la réponse du logicien.

**EXERCICE 2.** Donnez des exemples de phrases dans lesquelles le connecteur logique *ou* est inclusif.

**EXERCICE 3.** La phrase “La saucisse a mangé le chien” contient une erreur de nature lexicale, syntaxique ou sémantique ? Même question pour la phrase “La nuit tous les chats ∫ont gris” ? Même question pour la phrase “Je n'ai rien compris à cet algorythme” ?

**EXERCICE 4.** Dessinez l'arbre de dérivation des formules ci-dessous en plaçant les parenthèses omises si nécessaire :

$$(P \vee Q) \Rightarrow \neg(P \wedge \neg R).$$
$$P \vee Q \vee \neg R.$$
$$P \wedge (Q \vee \neg R).$$

**EXERCICE 5.** Soient $P$ et $Q$ deux propositions. On suppose que la formule $P \Rightarrow Q$ est vraie. Que pouvez-vous déduire sur la valeur de vérité de $Q$ ? Si $Q$ de plus est vraie, que pouvez déduire sur la valeur de vérité de $P$ ?

**EXERCICE 6.** On qualifie de *jumeau/jumelle* toute personne qui a un ou plusieurs frères ou soeurs du même accouchement. Pourquoi la phrase “Donald et Vladimir sont des jumeaux” ne pourrait-elle pas être acceptée comme une proposition mathématique ?

**EXERCICE 7.** Rappelez les deux lois de De Morgan et démontrez les.

1. version du 15 janvier 2019, 14 : 37

**EXERCICE 8.** Démontrez la transitivité de l'implication, i.e. si $P$, $Q$ et $R$ sont des propositions alors

$$\big((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)\big) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$$

**EXERCICE 9.** Soit $P$, $Q$ et $R$ trois propositions. On rappelle la table de vérité du connecteur ternaire “si/alors/sinon” :

| $P$ | $Q$ | $R$ | $\Rrightarrow$ |
|---|---|---|---|
| $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $\bot$ | $\bot$ | $\top$ | $\top$ |
| $\bot$ | $\top$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $\bot$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\bot$ | $\bot$ |
| $\top$ | $\bot$ | $\top$ | $\bot$ |
| $\top$ | $\top$ | $\bot$ | $\top$ |
| $\top$ | $\top$ | $\top$ | $\top$ |

Démontrez que

$$\Rrightarrow(P, Q, R) \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge R).$$

**EXERCICE 10.** Démontrez que le connecteur $\oplus$ est commutatif et associatif. Parmi les autres connecteurs binaires, lesquels sont commutatifs ?

**EXERCICE 11.** Soit $P$ et $Q$ deux variables propositionnelles. Démontrez que

$$(P \oplus Q) \equiv (P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$$

**EXERCICE 12.** Un connecteur logique binaire $\diamond$ est dit associatif si pour toutes propositions $P$, $Q$ et $R$ on a

$$(P \diamond Q) \diamond R \equiv P \diamond (Q \diamond R)$$

Parmi les 4 connecteurs logiques binaires de conjonction ($\wedge$), de disjonction ($\vee$), d'implication ($\Rightarrow$) et d'équivalence ($\Leftrightarrow$), lesquels sont associatifs ?

**EXERCICE 13.** Soit $P$, $Q$ et $R$ trois propositions. Démontrez que

$$P \wedge Q \Rightarrow R \equiv P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$$

**EXERCICE 14.** Soit $P$ et $Q$ deux propositions. Démontrez que

$$P \Leftrightarrow Q \equiv (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$$

**EXERCICE 15.** Exprimez la négation de chacune des propositions suivantes :

(1) $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$

(2) $\neg P \Rightarrow Q$

(3) $(P \wedge Q) \vee R$

**EXERCICE 16.** Soit $P, Q$ et $R$ trois variables propositionnelles et $\mathscr{F}$ la formule propositionnelle définie par

$$\big((P \vee Q) \vee R\big) \Rightarrow (P \wedge Q)$$

1. Donnez la valeur logique (interprétation) de la formule $\mathscr{F}$ dans les cas suivants :
   — Les variables $P$ et $Q$ prennent la valeur logique $V$, la variable $R$ prend la valeur logique $F$.
   — Les variables $P$ et $Q$ prennent la valeur logique $F$, la variable $R$ prend la valeur logique $V$.
2. Montrez que $\mathscr{F}$ est logiquement équivalente à

$$(P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg R) \wedge (Q \vee \neg P) \wedge (Q \vee \neg R)$$

**EXERCICE 17.** Soit $P, Q, R$ et $S$ des variables propositionnelles. Vérifiez que

$$\neg\big(((P \wedge Q) \vee P) \vee R) \vee S\big) \equiv \big((\neg P \wedge \neg R) \wedge \neg S\big)$$
$$\neg\big(P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)\big) \equiv \big((P \wedge Q) \wedge \neg R\big)$$

**EXERCICE 18.** Soit $P, Q, R$ des variables propositionnelles, la proposition

$$(((P \vee Q) \wedge (\neg P \vee R)) \Rightarrow (Q \vee R))$$

est-elle une tautologie ou non ?

## Modélisation du raisonnement

**EXERCICE 19.** Dans une brasserie vous commandez un *sandwich au jambon* ou un *sandwich au pâté* et un *verre de bière*. Le garçon vous écoute distraitement car il est occupé.

(1) Dans un premier temps il est sûr de la place du *ou* et du *et* mais il hésite sur la place des parenthèses.

  (a) Ecrire pour chacune des commandes possibles la formule propositionnelle correspondante.

  (b) Pour être sûr de contenter le client, il doit satisfaire à la fois les deux commandes possibles : écrire la formule propositionnelle correspondante. Montrez à l'aide d'une table de vérité que cette dernière est logiquement équivalente à apporter *(un sandwich au jambon ou un sandwich au pâté) et un verre de bière*.

(2) Dans un second temps le garçon hésite *aussi* sur la place du *et* et du *ou*.

  (a) Refaire dans ce cas le 1a), puis le 1b) en utilisant les équivalences logiques.

  (b) Montrez que dans ce cas il peut se contenter d'apporter *un sandwich au jambon et (un sandwich au pâté ou un verre de bière)*.

(3) Que doit-il apporter au minimum pour satisfaire le client et répondre à toutes ses hésitations ?

**EXERCICE 20.** On considère les trois variables propositionnelles $E, R, S$ définies par :

($E$) Il y a un examen.
($R$) Alexis révise ses cours.
($S$) Alexis échoue.

Soit les trois propositions suivantes :

($P$) S'il y a un examen, alors Alexis révise ses cours.
($Q$) Si Alexis révise ses cours, alors Alexis n'échoue pas.
($T$) S'il n'y a pas d'examen, alors Alexis n'échoue pas.

(1) Écrire $P, Q, T$ sous forme de propositions logiques.

(2) Transformez $P, Q, T$ en propositions $P', Q', T'$ ne contenant que des disjonctions ($\vee$) et des négations ($\neg$).

(3) En utilisant la question 1), trouver une proposition $U$ telle que la proposition $((P' \wedge Q') \Rightarrow U)$ soit une tautologie.

(4) En utilisant la question 1), trouver une proposition $V$ telle que la proposition $((T' \wedge U) \Rightarrow V)$ soit une tautologie.

(5) Que peut-on déduire de la réussite d'Alexis à l'examen ?

**EXERCICE 21.** Trois suspects ont été arrêtés à la suite du cambriolage de la villa de Monsieur Futay, ce sont *Bradacié*, *Piedplat* et *Nécassé*. Ils déclarent respectivement à l'inspecteur *Lafrite* qui les interroge :

(1) « *Piedplat* est coupable et *Nécassé* est innocent. »

(2) « Si *Bradacié* est coupable, alors *Nécassé* l'est aussi. »

(3) « Je suis innocent mais l'un au moins des deux autres est coupable. »

C'est une nécessité pour *Lafrite* d'envisager plusieurs possibilités, c'est ce qu'il fait avant de se mettre au lit :

(a) Est-il possible que mes trois lascars aient dit la vérité ? Alors qui serait coupable ?
(b) Ils auraient pu mentir tous les trois, je suppose !?
(c) Il me semble que certains témoignages se déduisent des autres. Leesquels au juste ??
(d) Si je suppose que tous sont innocents, qui a menti ? Et si je les suppose tous coupables, qui a menti ?
(e) Est-il possible qu'il n'y ait qu'un seul faux témoignage ? Dans ce cas, qui a menti et qui est coupable ?
(f) Et je garde le meilleur pour la fin... après ceci je dormirai comme un loir : si je suppose que l'innocent dit la vérité et que le coupable ment, alors qui est innocent et qui est coupable ?

Pouvez-vous aider l'inspecteur Lafrite à répondre à ces questions ? Indication : les variables propositionnelles $B, P$ et $N$ représentent les trois suspects, elles prennent pour valeur de vérité V si le suspect innocent et F sinon. Formalisez les déclarations de chacun des suspects et la validité de ces affirmations (table de vérité). Répondre à toutes les questions de Lafrite...

**EXERCICE 22.** Formalisez les affirmations suivantes en logique propositionnelle :

(1) Bob a déchiffré le message d'Alice ou Alice est inquiète,
(2) Bob a déchiffré le message d'Alice et Alice n'est pas inquiète,
(3) Bob n'a pas déchiffré le message d'Alice et Alice est inquiète,
(4) Bob n'a pas déchiffré le message d'Alice ou Alice n'est pas inquiète,
(5) Si Bob a déchiffré le message d'Alice alors Alice n'est pas inquiète,
(6) Bob n'a pas déchiffré le message d'Alice si Alice est inquiète.

## Ensembles et Prédicats

**EXERCICE 23.** Écrivez de manière formalisée que la réunion ensembliste est distributive sur l'intersection et réciproquement et démontrez le.

**EXERCICE 24.** Soit $X$ un ensemble. Démontrez que

$$(A \cap B = A \cup B) \Rightarrow A = B.$$

**EXERCICE 25.** Soit $X$ et $Y$ deux ensembles. Démontrez les équivalences suivantes :

$$A \cup B = B \Leftrightarrow A \subseteq B.$$
$$A \cap B = B \Leftrightarrow B \subseteq A.$$

**EXERCICE 26.** Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit $M_n := \{kn \mid k \in \mathbb{N},\ k \geq 2\}$ l'ensemble des multiples de $n$ et on pose

$$M := \bigcup_{n\in\mathbb{N},\ n\geq 2} M_n.$$

Démontrez que $\mathbb{N} \setminus (M \cup \{0, 1\})$ est l'ensemble de tous les nombres premiers.

**EXERCICE 27.** Soit $X$ un ensemble et $P(x)$ et $Q(x)$ deux prédicats. Écrivez la négation des deux propositions suivantes :

$$\forall x \in X \quad P(x) \Rightarrow Q(x),$$
$$\exists x \in X \quad P(x) \Rightarrow Q(x).$$

**EXERCICE 28.** La continuité simple d'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit

$$\forall x \in X \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall y \in X \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Alors que la continuité uniforme s'écrit

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in X \quad \forall y \in X \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Écrivez la négation de ces deux propositions.

**EXERCICE 29.** On rappelle que $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Démontrez que

$$(x, y) = (x', y') \Rightarrow (x = x') \wedge (y = y').$$

**EXERCICE 30.** Exprimez à l'aide de la logique des prédicats les phrases suivantes ainsi que leur négation :

(1) $f$ est l'application identité du plan réel dans lui-même.

(2) $f$ est une application du plan réel dans lui-même qui admet un point fixe.

(3) $f$ est une application constante de l'ensemble des réels dans lui-même.

(4) $f$ est une application de l'ensemble des réels dans lui-même et l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution.

(5) $f$ et $g$ sont des applications de l'ensemble des réels dans lui-même $f$ n'est pas inférieure à $g$.

(6) $f$ est une application *paire* de l'ensemble des réels dans lui-même.

(7) $f$ est une application *paire* de l'ensemble des réels dans lui-même strictement décroissante.

(8) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle bornée.

(9) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle croissante.

(10) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle constante à partir d'un certain rang.

(11) $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite réelle périodique.

**EXERCICE 31.** On rappelle que $(x, y) := \{\{x\}, \{x, y\}\}$. Démontrez que

$$(x, y) = (x', y') \Rightarrow (x = x') \wedge (y = y').$$

**EXERCICE 32.** Niez les propositions suivantes :

(1) “Tous les étudiants habitant Hyères et qui mesurent moins d'un mètre et soixante dix centimètres auront deux enfants et prendront leur retraite avant 50 ans.”

(2) “Tout triangle rectangle possède un angle droit”.

(3) “Dans toutes les licences d'informatique il y a des étudiants bons en maths”.

**EXERCICE 33.** On cherche à placer 8 reines sur un échiquier sans qu'elles ne se mettent en échec conformément aux règles du jeu d'échecs (la couleur des pièces étant ignorée). Par conséquent, deux reines ne devraient jamais partager la même rangée, colonne, ou diagonale. En vous inspirant de la formalisation du Sudoku, formalisez le problème des huit reines à l'aide de la logique des prédicats.

**EXERCICE 34.** Étudions le problème suivant : trois frères Alvin, Bob et Clive sont d'âges différents et portent des tee-shirts de couleurs différentes rouge, vert ou jaune. On dispose de deux indices :

(a) Celui qui porte le tee-shirt rouge ne porte pas de lunettes et c'est le plus jeune,

(b) Alvin porte des lunettes et Bob est plus vieux que celui qui porte le tee-shirt vert.

On cherche à déduire de ces indices le maximum d'information pour chacun des frères, à savoir sa position dans la fratrie, la couleur de son tee-shirt et s'il porte ou non des lunettes. Formalisez le problème des Tee-shirts avec la logique des prédicats.